T.D. 12 : Espaces vectoriels

1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?
Si oui, en donner une base et un supplémentaire

i) $E_1 = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0 \}$.

ii) $E_2 = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 1 \}$.

iii) $E_3 = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - z = 0 \}$.

iv) $E_4 = \{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0$ ou $2x + z + t = 0\}$.

v) $E_5 = \{(x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0$ et $2x + z + t = 0\}$.

vi) $E_6 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(0) = 0\}$.

vii) $E_7 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(0) = 0$ et $\tilde{P}(1) = 1\}$.

viii) $E_8 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = 0\}$.

ix) $E_9 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = 0\}$.

2. Les familles suivantes sont-elles libres ?

i) Dans $\mathbb{R}^4$: $\{ e_1; e_2 ; e_3\}$ tels que : $e_1 = (1 ; -1 ; 0 ; 1)$, $e_2 = (0 ; 2 ; -1 ; 1)$, $e_3 = (-2 ; 1 ; -2 ; 0)$.

ii) Dans $\mathbb{R}^4$: $\{ e_1; e_2 ; e_3\}$ tels que : $e_1 = (1 ; -1 ; 0 ; 1)$, $e_2 = (0 ; 2 ; -1 ; 1)$, $e_3 = (1 ; -5 ; 2 ; -1)$.

iii) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{ f_1; f_2 ; f_3\}$ tels que $f_1(x) = ch(x)$, $f_2(x) = sh(x)$, $f_3(x) = e^x$.

iv) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\{ f_1; f_2 ; f_3\}$ tels que $f_1(x) = ch(x)$, $f_2(x) = sh(x)$, $f_3(x) = e^{2x}$.

v) Dans $\mathbb{R}[X]$: $\{X ; 1 ; X^2 - 1 ; X(X^2 - 1)\}$.

vi) Dans $\mathbb{R}[X]$: $\{X + 1 ; X - 1 ; X^2 - 1\}$.