1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

i) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$

ii) $g(x)=x^3\sin(2x)+x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+x\cos^2(x)$;

$g'(x)=3x^2\sin(2x)+2x^3\cos(2x)+2x\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{1}{2}x^2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos^2(x)-2x\sin(x)\cos(x)$

iii) $h(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}(x+1)^2}$

iv) $j(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $j'(x)=\dfrac{-1}{x^2+1+x\sqrt{1+x^2}}$

v) $k(x)=\dfrac{1}{\cos\sqrt{x}}$; $k'(x)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\ \cos^2\left(\sqrt{x}\right)}$

vi) $u(x)=\operatorname{Arctan}\left(\sin(3x)\right)$; $u'(x)=\dfrac{3\cos(3x)}{1+\sin^2(3x)}$

vii) $v(x)=\ln\left(2+\sin^2\left(e^{x^2}\right)\right)$; $v'(x)=\dfrac{4xe^{x^2}\sin\left(e^{x^2}\right)\cos\left(e^{x^2}\right)}{2+\sin^2\left(e^{x^2}\right)}=\dfrac{2xe^{x^2}\sin\left(2e^{x^2}\right)}{2+\sin^2\left(e^{x^2}\right)}$

viii) $w(x)=\operatorname{Arctan}\dfrac{1+x}{1-x}$; $w'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

2. Calculer les dérivées n-ième des fonctions suivantes $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$:

i) $f(x) = \sin^2(x)$ $=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ $f^{(n)}(x)=-2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

ii) $g(x) = x^2\,(1+x)^n$ $g^{(n)}(x)=n!x^2+2n\times n!x(1+x)+n(n-1)\dfrac{n!}{2}(1+x)^2$

(avec la formule de Leibniz)

iii) $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $h^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(on « intuite » la formule, puis on la démontre par récurrence)

iv) $j(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $j^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ (se déduit de la précédente)

v) $k(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $=\dfrac{1}{2}\left(h(x)+j(x)\right)$ d'où : $k^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)$