T.D. 9 : Calcul de limites de fonctions **CORRECTION**

Etudier la limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions f suivantes (on distinguera éventuellement limite à droite et à gauche).

i) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ $(a = 1)$

$$\lim_1 f = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3$$

ii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-1}$ $(a = 1)$

$$\lim_1 f = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}$$

iii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $(a = 3)$

$$\lim_3 f = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

iv) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ $(a \in \{1; 0; -1; +\infty; -\infty\})$ $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)} = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$; f est paire.

$\lim_0 f = -1$; $\lim_{1^+} f = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$; $\lim_{1^-} f = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x+1}{x-1} = -\infty$; donc (par parité) $\lim_{(-1)^+} f = -\infty$; $\lim_{(-1)^-} f = +\infty$;

$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1$; donc (par parité) $\lim_{-\infty} f = 1$.

v) $f(x) = x^2(1 + \sin x)$ $(a = +\infty)$ $f\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 0$ et $f(2k\pi) = 4k^2\pi^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

f n'a donc pas de limite en $+\infty$ (ni finie, ni infinie).

vi) $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $(a = +\infty)$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

vii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{2x+5}}$ $(a \in \{2; +\infty\})$

$$\lim_2 f = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{2x+5}}{(\sqrt{x+2}+2)(x+1)} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1+\frac{3}{x}}-\sqrt{2+\frac{5}{x}}\right)} = 0.$$

viii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $(a = 0)$ $f(x) = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

$$\lim_{0^-} f = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = -\sqrt{2}\ ; \quad \lim_{0^+} f = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}} = \sqrt{2}.$$

ix) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ $(a = \dfrac{\pi}{3})$

$$\lim_{\frac{\pi}{3}} f = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(2x)\cos(x)+\cos(2x)\sin(x)}{1-2\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(4\cos^2(x)-1)\sin(x)}{1-2\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} -\sin x(2\cos x+1) = -\sqrt{3}$$