T.D. 8 : Equations différentielles CORRECTION

1. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

i) $y' + 2y = x^2$ $\quad y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

ii) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos(x)$ $\quad y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

iii) $(1 + \mathrm{e}^x)\, y' + \mathrm{e}^x y = 1 + \mathrm{e}^x$ $\quad y(x) = \frac{C + x + \mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$

iv) $x\,(1 + \ln^2(x))\, y' + 2\ln(x)\, y = 1$ $\quad y(x) = \frac{C + \mathrm{Arc}\tan x}{1 + x^2}$

v) $(x^2 + 1)\, y' + 2xy + 1 = 0$ $\quad y(x) = \frac{C - x}{1 + x^2}$

vi) $(1 + \cos^2(x))\, y' - \sin(2x)\, y = \cos(x)$ $\quad y(x) = \frac{C + \sin x}{1 + \cos^2 x}$

2. Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

i) $y'' + y = 0$ $\quad y(x) = A\cos x + B\sin x$

ii) $y'' - 3y' + 2y = 0$ $\quad y(x) = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x}$

iii) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x$ $\quad y(x) = \left(A + \frac{1}{3}x\right)\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-2x}$

iv) $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$ $\quad y(x) = (A\cos x + B\sin x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$