T.D. 4: Fonctions circulaires - Trigonométrie CORRECTION

1. Déterminer les valeurs suivantes :

$\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$; $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$; $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$;

$\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$; $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\frac{6}{5}\pi\right)\right)=\frac{4\pi}{5}$; $\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\frac{\pi}{5}$;

$\mathrm{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{6}{5}\pi\right)\right)=-\frac{\pi}{5}$; $\mathrm{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$

2. Simplifier les expressions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition :

i) $\cos(2\mathrm{Arccos}\,x)=2x^2-1$ sur [-1; 1]

ii) $\sin(2\mathrm{Arcsin}\,x)=2x\sqrt{1-x^2}$ sur [-1; 1]

iii) $\sin^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos x\right)=\frac{1-x}{2}$ sur [-1; 1]

iv) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\sin x\right)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}$ sur [-1; 1]

v) $\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\underset{x=\tan X}{=}\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan X}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan X}\right)=\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+X\right)\right)$

$$x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\Leftrightarrow X\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow X+\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$$

Lorsque $X+\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(X+\frac{\pi}{4}\right)\right)=X+\frac{\pi}{4}$

Lorsque $X+\frac{\pi}{4}\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right[$, $\mathrm{Arc}\tan\left(\tan\left(X+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(X+\frac{\pi}{4}\right)-\pi=X-\frac{3\pi}{4}$

Finalement : $\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}+\mathrm{Arc}\tan x, & \text{si } x<1\\ \mathrm{Arc}\tan x-\frac{3\pi}{4}, & \text{si } x>1\end{cases}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

3. Résoudre les équations suivantes :

i) cos(3x) + sin(3x) = 1 $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; $S=\left\{\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}$

ii) cos(2x) + $\sqrt{3}$ sin(2x) = 1 $\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; $S=\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

iii) cos(3x) – cos(5x) = sin(6x) + sin(2x)

$$\Leftrightarrow -2\sin(4x)\sin(-x)=2\sin(4x)\cos(2x)\Leftrightarrow \sin(4x)\left(\sin(x)-\cos(2x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(4x)=0\\ ou\\ \sin(x)-\left(1-2\sin^2(x)\right)=0\end{cases}$$

$$2\sin^2(x)+\sin(x)-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x)=-1\\ ou\\ \sin(x)=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{k\pi}{4};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

iv) $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin(3x)\cos(x)+2\sin(3x)\cos(3x)=0\Leftrightarrow \sin(3x)\left(\cos(x)+\cos(3x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(3x)=0\\ ou\\ 2\cos(2x)\cos(x)=0\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

v) $1+\cos(2x)+\cos(4x)=0$

$$\Leftrightarrow 1+\cos(2x)+2\cos^2(2x)-1=0\Leftrightarrow \cos(2x)\left(1+2\cos(2x)\right)=0$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$$