# T.D. 3: Nombres complexes CORRECTION

**1.** Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

i) z = (2 – 3i) (1 + 2i) (3 – 2i) (2 + i) = 65

ii) $z=\dfrac{(1+i)(2i+1)}{(3-i)(2i-1)}=\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$

iii) $z=\dfrac{1+ki}{2k+\left(k^2-1\right)i}=\dfrac{k}{k^2+1}+\dfrac{1}{k^2+1}i$ où $k\in\mathbb{R}$

iv) $Z=\dfrac{2+\overline{z}}{1-\overline{z}}$ où $z\in\mathbb{C}$ avec z = x + iy : Z = $=\dfrac{2-x-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}-\dfrac{3y}{(1-x)^2+y^2}i$

**2.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

i) z = -1 + i$\sqrt{3}$ $|z|=2,\ \arg(z)=\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

ii) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{2e^{\frac{i\pi}{6}}}$ $|z|=1,\ \arg(z)=\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

iii) z = 1 + cosϕ + i sinϕ $=1+e^{i\phi}=e^{i\frac{\phi}{2}}\left(e^{i\frac{\phi}{2}}+e^{-i\frac{\phi}{2}}\right)=2\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}$ où $\phi\in\,]-\pi\,;\,\pi\,[$ donc $\dfrac{\phi}{2}\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)>0$ d'où: $|z|=2\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$, $\arg(z)=\dfrac{\phi}{2}[2\pi]$

iv) $z=\dfrac{1+i\tan\varphi}{1-i\tan\varphi}=\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}=\dfrac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}=e^{2i\varphi}$, où $\varphi\in[-\pi;\pi]\setminus\left\{\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}$ d'où: $|z|=1,\ \arg(z)=2\phi[2\pi]$

**3.** Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_1=1-\sqrt{3}i=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}i=\dfrac{2}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_3=z_1+3z_2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}$;

$z_4=z_1{}^2z_2{}^2=\dfrac{16}{9}e^{i\pi}$; $z_5=\dfrac{z_1}{z_3}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $z_6=\dfrac{\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i}{\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

**4.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

i) $z^3-6z^2+13z-10=0$ $\Leftrightarrow(z-2)(z-(2+i))(z-(2-i))=0\Leftrightarrow z\in\{2;2+i;2-i\}$

ii) $z^4+4z^2+16=0$ ; en posant $Z=z^2$, on doit résoudre $Z^2+4Z+16=0$ : $Z=-2\pm2i\sqrt{3}$. Reste à résoudre $z^2=$ $Z=-2\pm2i\sqrt{3}$. On trouve : $z\in\left\{1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3};1+i\sqrt{3};-1-i\sqrt{3}\right\}$