T.D. 1: Logique - Raisonnement	**CORRECTION**

1. On considère la tautologie A suivante :
« Quand je suis en cours, mon portable est éteint ».
On note C l'assertion « je suis en cours », et P l'assertion « mon portable est allumé ».

a) Donner un équivalent de A à l'aide de C, P et des opérateurs logiques. $A \Leftrightarrow \left(C \Rightarrow \urcorner P\right)$

b) Dans les cas suivants, écrire des assertions vraies à l'aide de P et C (hormis les tautologies $P \vee \urcorner P$ et $C \vee \urcorner C$ ☺) :

- Je suis en cours C ; $\urcorner P$; $\left(C \wedge \urcorner P\right)$; $\left(C \vee \urcorner P\right)$; $\left(C \vee P\right)$
- Mon portable sonne P ; $\urcorner C$; $\left(P \wedge \urcorner C\right)$; $\left(P \vee \urcorner C\right)$; $\left(C \vee P\right)$

c) Exprimer à l'aide de P et C une assertion qui illustre : « Je suis mis à la porte » . $C \wedge P$
Que peut-on en penser ? L'assertion A étant une tautologie, l'assertion $C \wedge P$ est fausse.

d) Donner la contraposée de l'assertion A.
Quand mon portable est allumé, je ne suis pas en cours

e) Donner la réciproque de l'assertion A.
Quand mon portable est éteint, je suis en cours

2. Soit f une fonction réelle.
Traduire par la phrase la plus concise possible les propositions suivantes :

i) $\forall x \in \mathbb{R},\, f\left(x\right) = 0$ f est la fonction nulle

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\, f\left(x\right) \neq 0$ f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

iii) $\exists x \in \mathbb{R},\, f\left(x\right) = 0$ f s'annule sur $\mathbb{R}$

iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\, f\left(x\right) \leq f\left(y\right)$ f admet un minimum

v) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\, f\left(x\right) < f\left(y\right)$ f n'admet pas de maximum

3. Montrer, avec une table de vérité, que la propriété suivante est une tautologie :
$$\left(\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right) \wedge \left(r \Rightarrow p\right)\right) \Leftrightarrow \left(p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r\right)$$

L'assertion $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ est vraie si, et seulement si p, q et r sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$r \Rightarrow p$	$\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right) \wedge \left(r \Rightarrow p\right)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

4. Montrer que a est pair si, et seulement si a^2 est pair.
$\Rightarrow$) Si a est pair, il existe p tel que $a = 2p$, alors $a^2 = 4p^2$ est pair
$\Leftarrow$) Si a est impair, il existe p tel que $a = 2p + 1$, alors $a^2 = 4(p^2 + p) + 1$ est impair
Ainsi, si a est impair, alors a^2 est impair. Par contraposée, si a^2 est pair, alors a est pair.

5. Monter que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est un nombre irrationnel.
Raisonnons par l'absurde :
Si $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$, alors il existe p et q des entiers naturels non nuls (ln 2 et ln 3 étant des réels strictement positifs), tels que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$. On a donc, $p \ln(3) = q \ln(2)$ donc $3^p = 2^q$.

q étant non nul, 2^q est pair.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel p, 3^p est impair :
C'est vrai pour $p = 0$.
Soit un entier naturel p ; supposons 3^p impair.
Alors, il existe un entier k tel que $3^p = 2k + 1$, d'où $3^{p+1} = 2(3k + 1) + 1$ est impair.
Par principe de récurrence, on a bien 3^p est impair pour tout entier naturel p.
Ainsi, on a $3^p = 2^q$ avec 3^p impair et 2^q pair. On a donc une contradiction, d'où : $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$

6. Soient $p_1, p_2, \dots , p_k$ des nombres premiers.
Montrer que $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k + 1$ n'est divisible par aucun des p_i.
Si p_i divise $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k + 1$ alors il existe un entier n tel que $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k + 1 = p_i n$, alors : $p_i \left(n - p_1 \times \ldots \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times \ldots \times p_k\right) = 1$, ce qui est impossible (p_i étant un nombre premier, il est strictement supérieur à 1).

Que peut-on en déduire ?
Si l'ensemble des nombres premiers est fini (notons le $\{p_1; p_2; \ldots; p_k\}$), alors l'entier $P = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k + 1$ est strictement supérieur à tous les entiers p_i et n'est divisible par aucun d'eux. C'est donc un nombre premier, supérieur au plus grand des nombres premiers, ce qui est contradictoire.
L'ensemble des nombres premiers est donc infini