

T.D. 1 : Logique - Raisonnement

1. On considère la tautologie A suivante :

« Quand je suis en cours, mon portable est éteint ».

On note C l'assertion « je suis en cours », et P l'assertion « mon portable est allumé ».

a) Donner un équivalent de A à l'aide de C , P et des opérateurs logiques.

b) Dans les cas suivants, écrire des assertions vraies à l'aide de P et C (hormis les tautologies $P \vee \neg P$ et $C \vee \neg C$ ☺).

- Je suis en cours
- Mon portable sonne

c) Exprimer à l'aide de P et C une assertion qui illustre : « Je suis mis à la porte » .

Que peut-on en penser ?

d) Donner la contraposée de l'assertion A .

e) Donner la réciproque de l'assertion A .

2. Soit f une fonction réelle.

Traduire par la phrase la plus concise possible les propositions suivantes :

i) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

iii) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

v) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

3. Montrer, avec une table de vérité, que la propriété suivante est une tautologie :

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r)$$

4. Montrer que a est pair si, et seulement si a^2 est pair.

5. Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est un nombre irrationnel.

6. Soient p_1, p_2, \dots, p_k des nombres premiers.

Montrer que $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1$ n'est divisible par aucun des p_i .

Que peut-on en déduire ?