

## T.D. 1 : Logique - Raisonnement

**1.** On considère la tautologie  $A$  suivante :

« Quand je suis en cours, mon portable est éteint ».

On note  $C$  l'assertion « je suis en cours », et  $P$  l'assertion « mon portable est allumé ».

a) Donner un équivalent de  $A$  à l'aide de  $C$ ,  $P$  et des opérateurs logiques.

b) Dans les cas suivants, écrire des assertions vraies à l'aide de  $P$  et  $C$  ( hormis les tautologies  $P \vee \neg P$  et  $C \vee \neg C$  ☺).

- Je suis en cours
- Mon portable sonne

c) Exprimer à l'aide de  $P$  et  $C$  une assertion qui illustre : « Je suis mis à la porte » .

Que peut-on en penser ?

d) Donner la contraposée de l'assertion  $A$ .

e) Donner la réciproque de l'assertion  $A$ .

**2.** Soit  $f$  une fonction réelle.

Traduire par la phrase la plus concise possible les propositions suivantes :

i)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

iii)  $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

iv)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)$

v)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$

**3.** Montrer, avec une table de vérité, que la propriété suivante est une tautologie :

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r)$$

**4.** Montrer que  $a$  est pair si, et seulement si  $a^2$  est pair.

**5.** Montrer que  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$  est un nombre irrationnel.

**6.** Soient  $p_1, p_2, \dots, p_k$  des nombres premiers.

Montrer que  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1$  n'est divisible par aucun des  $p_i$ .

Que peut-on en déduire ?