Exos Probas 2 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la famille $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

2. X suivant la loi décrite précédemment admet-elle une espérance ?

Exercice 2

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.
Déterminer la loi des variables aléatoires $S = X + Y$ et $M = \text{Min}(X, Y)$.

Exercice 3

On effectue des tirages successifs dans une urne (de contenance illimitée) contenant initialement une boule blanche et une boule noire. A chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée, et on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule noire. On définit la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première boule noire, et la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Déterminer les lois de probabilité de X et de Y.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.

3. Même question pour Y.

Exercice 4

On répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A se réalise à chaque fois avec une probabilité $p \in]0; 1[$.
On note X la variable aléatoire égale au rang de la deuxième réalisation de l'événement A.
Déterminer la loi de X, montrer qu'elle admet une espérance et la calculer.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = an^2\dfrac{\lambda^n}{n!}$, où λ est un réel strictement positif donné, et a un réel.

1. En supposant qu'une telle loi existe, quelle est sa fonction génératrice ?

2. En déduire la valeur de a pour que la loi existe, et calculer alors l'espérance de X.

Exercice 6

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, et Y une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
On note $Z = XY$, et G_X, G_Y, G_z les fonctions génératrices de X, Y et Z respectivement.

1. Donner la fonction génératrice de Y.

2. Montrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$; en déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{V}(Z)$.

Exercice 7

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, et Y une variable aléatoire indépendante de X suivant une loi uniforme sur $\{1; 2\}$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = XY$.

2. Calculer la probabilité que Z soit paire.

Exercice 8

On dispose d'une pièce déséquilibrée, amenant *Pile* avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux *Pile* consécutifs, et on note $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3, puis montrer que : $\forall n \geq 3, a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$.

2. En déduire la loi de X ; montrer qu'elle admet une espérance, et la calculer.

Exercice 9

On réalise une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètre $p \in]0;1[$.

1. On stoppe le processus dès que l'on a obtenu au moins un succès et au moins un échec.
On note T le nombre d'épreuves réalisées avant l'arrêt du processus, V le nombre de succès obtenus au moment de l'arrêt.

a. Déterminer la loi de T, ainsi que son espérance.

b. Déterminer la loi conjointe du couple (T, V).

c. En déduire la loi de V, et calculer son espérance.

2. On définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :
▷ S_n est le nombres d'épreuves réalisées pour obtenir n succès ($n \in \mathbb{N}^*$) ;
▷ $T_1 = S_1$, et pour tout $n \geq 2, T_n$ est le nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.

a. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n en fonction des variables aléatoires $T_i, i \in \mathbb{N}^*$.

b. Déterminer la loi de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer la loi de S_1, S_2, puis S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. En déduire que : $\forall x \in]0;1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$.

Exercice 10

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{j!(i-j)!2^i} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois de X et Y, ainsi que leurs espérances.

2. On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$.

a. Calculer, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Z = j)$.

b. En déduire la loi de Z.

3. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 11

On lance n fois une pièce de monnaie supposée équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver une condition suffisante sur l'entier n pour que la fréquence d'apparition de *Face* soit strictement comprise entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

2. Au bout de 1000 lancers, on observe une proportion de *Pile* de 0,65. Que peut-on en conclure ?