Exos Géom 1 - Courbes planes paramétrées

Exercice 1
Etudier et tracer les courbes définies par les représentations paramétriques suivantes :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{t^2}{t-1} \\ \\ y(t)=\dfrac{t}{t^2-1} \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}-\{-1;1\}$

2. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=2t-\dfrac{1}{t^2} \\ \\ y(t)=2t+t^2 \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}^*$

(on étudiera les points doubles de ces courbes)

3. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t+\dfrac{4}{t^2} \\ \\ y(t)=t^2+\dfrac{16}{t} \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}^*$

4. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\tan t-\sin t \\ \\ y(t)=\dfrac{1}{\cos t} \end{array}\right. \quad , \ t \in \mathbb{R}-\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

Exercice 2 Cycloïde
Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=1-\cos t \end{array}\right.$$

Cette courbe représente la trajectoire d'un point situé sur un cercle de rayon 1 roulant sans glisser sur l'axe (Ox).

Exercice 3 Cardioïde
Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=2\cos(t)+\cos(2t) \\ y(t)=2\sin(t)+\sin(2t) \end{array}\right.$$

Exercice 4 Bicorne
Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sin t \\ y(t)=\dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{array}\right.$$

Exercice 5 Courbe de Lissajous
Etudier et tracer la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\sin(2t) \\ y(t)=\sin(3t) \end{array}\right.$$

On étudiera les points doubles sur $[0,2\pi[$.

Exercice 6 Astroïde

1. Etudier et tracer la courbe $\mathscr{C}$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=\sin^3 t \end{array}\right.$$

2. On note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection des axes $(Ox),(Oy)$ avec la tangente au point de paramètre $t \neq 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ de $\mathscr{C}$. Calculer $A(t)B(t)$.

Exercice 7 Tractrice

1. Etudier et tracer la courbe $\mathscr{C}$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{\text{sh}t}{\text{ch}t} \\ y(t) = \dfrac{1}{\text{ch}t} \end{cases}$$

2. On note $A(t)$ le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente au point $M(t)$ de paramètre t de $\mathscr{C}$. Calculer $A(t)M(t)$.

Exercice 8 Folium de Descartes

On considère la courbe $\mathscr{C}$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

1. Montrer que l'on peut réduire le domaine d'étude à $t \in]-1;1[$.
2. Etudier et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 9 Lemniscate de Bernoulli

1. Etudier et tracer la courbe $\mathscr{C}$ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ \\ y(t) = \dfrac{\sin t \ \cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases}$$

2. On considère les points $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$ et $F'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.
   Montrer que pour tout point M de $\mathscr{C}$, on a : $MF \times MF' = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 10

Déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe de la famille de droites (D_t) dans les cas suivants :

1. $D_t : t^3x + 2ty + 2 = 0, \quad t \in \mathbb{R}^*$
2. $D_t : x\cos\, t + y\sin\, t - \mathrm{e}^t = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

Exercice 11

Déterminer une équation cartésienne des courbes suivantes dont on donne une représentation paramétrique, et les identifier :

1. $\begin{cases} x(t) = \cos t + 3 \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$
2. $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t - 2 \\ y(t) = \sin^4 t + 4\sin^2 t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$