Exos AN7 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans plusieurs exercices, on utilisera le résultat suivant (que l'on démontrera dans le dernier) :

$$\forall a > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{\sin t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\mathrm{d}t$$

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \cos t \,\mathrm{d}t$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]0; +\infty[$ tel que $f(c) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. Exprimer f' à l'aide des fonctions usuelles.

4. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $a > 0$. On considère $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2\pi^2}{a}xf(x).$$

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout x.

Exercice 6

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

3. Donner une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout x.

Exercice 7
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $[0;+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0;+\infty[$.

3. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8
Soit $F : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour $y>0$, $x \mapsto F(x,y)$ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$.

2. Pour $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$.

3. En déduire l'expression de $F(x,y)$ pour $(x,y) \in]0;+\infty[^2$.

Exercice 9
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

2. Etudier la dérivabilité de f sur D, et donner une expression de $f'(x)$.

3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ pour tout $x \in D$.

4. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$$

Exercice 10
On définit :

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto f(x^2).$$

1. Montrer que f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ (à déterminer), tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 + g(x) = C.$$

4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

5. Démontrer le résultat énoncé en préambule des exercices de cette feuille.