Exos AN6 - Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1

Etudier la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f pour les fonctions suivantes :

1. $f : U \to \mathbb{R}, (x;y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \in U - \{(0;0)\} \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$

où $U = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / xy > -1\}$.

2. $f :]0;1[^2 \to \mathbb{R}, (x;y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) & \text{si } y \leq x \\ (1-x)y & \text{si } y > x \end{cases}$

Exercice 2

Etudier l'existence d'une limite en $(0;0)$ de :

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{\ln(1+x)\ln(1+y)}$$

Exercice 3

Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, étudier la continuité en (0 ;0) ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles première en (0 ;0) :

1. $\begin{cases} f(x;y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ f(0;0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x;y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ f(0;0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x;y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ f(0;0) = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x;y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ f(0;0) = 0 \end{cases}$

Exercice 4

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x;y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0;0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en $(0;0)$.

2. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f en $(0;0)$.

3. Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5

Déterminer les extrema des applications f suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$ (préciser s'ils sont globaux) :

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2$

2. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

3. $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$

Exercice 6
Déterminer le maximum sur $[0;1]^2$ des fonctions f suivantes :

1. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ **2.** $f(x,y)=x^2+xy-y^3$

Exercice 7
Soit $f:(x,y)\mapsto(x+y)(x^2+y^2-2x-2y-2)$.

1. Montrer que f s'annule sur la réunion d'une droite et d'une courbe à déterminer.
2. Déterminer le signe de $f(x,y)$ en fonction du lieu de (x,y).
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Soit $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x-1)^2+(y-1)^2\leq 4\}$. Déterminer les extrema de f sur K.

Exercice 8
Déterminer les bornes supérieure suivantes :

1. $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{\substack{(x,y)\in[0;+\infty[^2\\ 0\leq x+y\leq\pi}}\sin x\sin y\,\sin(x+y)$ **2.** $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{\substack{(x,y)\in[0;+\infty[^2\\ 0\leq x+y\leq 2}}x^2y^2(x^2+y^2)$

Indication : Pour la seconde, on pourra utiliser : $f(x,y)=(xy)^2((x+y)^2-2xy)$.

Exercice 9
Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On appelle *laplacien* de f la fonction :

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

1. Donner l'expression du laplacien en coordonnées polaires.
2. La fonction f est dite *harmonique* si son laplacien est nul sur $\mathbb{R}^2$.
Déterminer les fonctions harmoniques isotropes (ne dépendant pas de l'angle polaire θ).

Exercice 10

1. Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{x}$,
en employant le changement de variable $\left(u=\dfrac{y}{x},v=x^2+y^2\right)$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$: $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$: $2\dfrac{\partial f}{\partial x}+3\dfrac{\partial f}{\partial y}=xy$,
en employant le changement de variable $(u=x,v=3x-2y)$

4. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y+\mathrm{e}^x$, avec $\forall x\in\mathbb{R},f(x,0)=x^2$, et $\forall y\in\mathbb{R},f(0,y)=3y$.

Exercice 11
Déterminer les applications $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^1, telles que, en notant :

$$F:]0;+\infty[^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto F(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

on ait :

$$\forall(x,y)\in]0;+\infty[^2,y\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)+F(x,y)=1.$$