

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \det(\text{Id} + tu) \end{cases}$$

est dérivable en 0, et calculer $\varphi'(0)$.

Indication : On fera apparaître le polynôme caractéristique de $-u$.

Exercice 8

Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et u, v, w trois fonctions de classe C^2 de $[a, b]$ vers \mathbb{R} .

On suppose que :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ vérifiant :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$, de classe C^∞ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \neq 0, \quad \left(t^{n-1} f\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right)$$