Exos AN4 - Equations différentielles

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x' = -y + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = x + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x' = -4x + 6y - 3z \\ y' = -x + 3y - z \\ z' = 4x - 4y + 3z \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x' = 2x - 2y + z \\ y' = 2x - 3y + 2z \\ z' = -x + 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 5x + y - z + 1 - 2t - 6t^2 \\ y' = 2x + 4y - 2z - 2 + 2t - 6t^2 \\ z' = x - y + 3z - 1 - 4t \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x' = -x + y - z + t + 1 \\ y' = -4x + 3y - 4z + 4t + 1 \\ z' = -2x + y - 2z + 2t + 1 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$

Exercice 2
Résoudre l'équation différentielle :

$$(E):\ y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

Exercice 3
Résoudre les équations différentielles suivantes, sur l'intervalle I donné :

1. $y' - \dfrac{x}{x^2-1}y = 2x,$ sur $I =]1; +\infty[$.
2. $y' - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0,$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. $x(x-1)y' - (x-2)y = 0,$ sur $I = \mathbb{R}$ (Cette résolution nécessite un recollement !).
4. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2},$ sur $I = \mathbb{R}$.
5. $y'' + y = \tan t,$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 4
Soit $f :]-1; 1[\to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E):\ (1-x)y' - y = f.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. On suppose que f admet un développement en série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geq 1$.
Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0 :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq 1$, et exprimer les b_n en fonction des a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes, après avoir trouvé une solution polynômiale :

1. $x^2(x+1)y'' - xy' + y = 0,$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. $(x^2+1)y'' - 2y = 0,$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes, en effectuant le changement de variable suggéré :

1. $y'' + y' + \mathrm{e}^{-2x}y = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x},$ sur $\mathbb{R}$, en posant $t = \mathrm{e}^{-x}$.

2. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0,$ sur $]-1;1[$, en posant $t = \mathrm{Arcsin}\, x$

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes, en effectuant le changement de fonction suggéré :

1. $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = \mathrm{e}^x,$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en posant $z = x^2y$.

2. $(x^2+1)y'' - (3x^2-4x+3)y' + (2x^2-6x+4)y = 0,$ sur $\mathbb{R}$, en posant $z = (1+x^2)y$.

3. $xy'' - (1+x)y' + y = 1,$ sur $\mathbb{R}$, en posant $z = y' - y$.

Exercice 8

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$$

On donnera la (ou les) fonction(s) obtenue(s) à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 9

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(H):\ (1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

en recherchant les solutions développables en série entière.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(L):\ (1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{1+x^2}$$

par la méthode de variation des constantes.