Exos AN3 - Séries entières

Exercice 1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0}(n^2+1)(-1)^n z^{2n}$ **2.** $\sum_{n\geq 0} n z^{n^2}$ **3.** $\sum_{n\geq 0}\frac{n^{3n}}{(3n)!}z^{3n}$

4. $\sum_{n\geq 0}\frac{a^{n^2}}{(2n)!}z^n,\ (a\in\mathbb{R}_+^*)$ **5.** $\sum_{n\geq 1}\frac{a^n}{n+b^n}z^n,\ ((a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2)$ **6.** $\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 (1+t^2)^n \mathrm{d}t\right) z^n$

Exercice 2
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n-2)}{n!}x^n$ **3.** $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{n+1}x^n$

4. $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n}}{3n}$ **5.** $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{2n+1}$ **6.** $\sum_{x\geq 0}\frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n$

Exercice 3
Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est de classe C^∞.

Exercice 4
Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0, et le rayon de convergence des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$ **2.** $x\mapsto \sin^2 x$ **3.** $x\mapsto \ln(x^2-5x+6)$

4. $x\mapsto \ln(1+x+x^2)$ **5.** $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin\, x$ **6.** $x\mapsto \int_0^x \frac{\sin\, t}{t}\mathrm{d}t$

Exercice 5
Soit $f : x\mapsto \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est développable en série entière, et en déterminer le rayon.

Exercice 6
Etablir la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)3^n}$ **2.** $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ **3.** $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 7

On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = -4, a_1 = 2, a_2 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 2^{n+2}$.

2. En déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est non nul.

3. Soit $\rho = \min(1, R)$.

a. On pose, pour tout $x \in]-\rho, \rho[, S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que $S(x) = \dfrac{-4 + 6x + 6x^2}{(x+1)(x-1)^2}$.

b. Déterminer les réels a, b, c tels que $S(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x-1}$.

4. Exprimer a_n en fonction de n.

Exercice 8

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n^2 z^n$ et $\sum a_n z^{2n}$.

Exercice 9

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n$$

2. Calculer sa somme $S(x)$ à l'aide d'un produit de Cauchy.

3. En utilisant la relation $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n}$, retrouver $S(x)$.

Exercice 10

1. Calculer, pour tout réel θ, le rayon de convergence et la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \cos(n\theta) x^n$$

2. En déduire, pour tout réel θ, le rayon de convergence et la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$$