Exos AN2 - Séries numériques

Exercice 1

Etudier la nature des séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ **2.** $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ **3.** $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

4. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^{\frac{3}{2}}+\cos n}$ **5.** $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ **6.**$u_n = 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+2)$

7. $u_n = \ln(n+\pi) - \ln(n+e)$ **8.** $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$ **9.** $\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$

10. $u_n = \dfrac{3\cdot 6\cdot 9...(3n)}{n^n}$ **11.** $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} (a\in\mathbb{R}^*)$ **12.** $u_n = \dfrac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln(n)))^\alpha}, (\alpha\in\mathbb{R}_+^*)$

Exercice 2

Montrer que les séries suivantes convergent, et calculer leurs sommes :

1. $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-2n}\mathrm{ch}n$ **2.** $\sum_{n\geq 1} \dfrac{2}{n(n+2)}$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$

4. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^3+6n^2+11n+6}$ **5.** $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\cos\dfrac{a}{2^n}\right)$ où $a\in\,]0;\pi[$

Exercice 3

Soit $\sum a_n$ une série positive convergente. Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum a_n^2$ **2.** $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ **3.** $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$

Exercice 4

1. Soit (a_n) une suite de réels positifs décroissante, de limite nulle.
Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente.

Indication : Montrer que les suites des sommes partielles (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

3. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$.

a. (u_n) vérifie-t-elle les hypothèses de la question **1** ?

b. Déterminer $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$.

c. Etablir la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 5

En utilisant une conmparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$.

Exercice 6

1. En utilisant le théorème de Taylor avec reste intégral, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n \cdot n!}$.

Exercice 7

Montrer que les séries $\sum u_n$ suivantes convergent, et déterminer leur somme, à l'aide d'un produit de Cauchy :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k(n-k)!}$ **2.** $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$

Exercice 8

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

En considérant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) converge.
La limite de cette suite se note γ, appelée *constante d'Euler*.

Exercice 9

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$.

a. Montrer que $d_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2(k-1)}$

b. En déduire que $d_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^2}$

Remarque : On a montré que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.