Exos AN0 - Révisions

Exercice 1
Etablir la convergence, et donner la limite des suites suivantes :
a) $u_0 = 2,\;$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2u_n}$; **b)** $v_0 \in \mathbb{R}_+^*,\;$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n^3 + 3\lambda v_n}{3v_n^2+\lambda},\;$ où $\lambda > 0$.

Exercice 2
Donner la forme explicite des suites suivantes :
a) $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 1+\sqrt{2} \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} w_0 = 0, w_1 = 1 \\ w_{n+2} = \dfrac{-1}{4}w_n + w_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$.
Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 4
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
(i) Entre deux réels distincts, il existe au moins un élément de A.
(ii) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A

Remarque : Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si A est majorée, il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

Exercice 5
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(x+1)y' - 2y = \mathrm{e}^x(x+1)^3$, sur $]-1;+\infty[$.

2. $(1+\cos^2 x)y' - \sin(2x)\, y = \cos x$, sur $\mathbb{R}$.

3. $y'' + 6y' + 9y = (x+1)\mathrm{e}^{-3x}$.

4. $y'' + 4y' + 13y = \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 6
Calculer pour $x > 0$ les intégrales suivantes :
a) $I(x) = \displaystyle\int_0^x t\,(\mathrm{Artcan}(t))^2\,\mathrm{d}t$; **b)** $J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t$; **c)** $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t$.

Exercice 7
Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t,\ \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que f et g sont nulles sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{\ln(1+2x)}{1+x}\right)$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $g : x \mapsto (1+x)^x$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x\ln(x)}{x-1}$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 1.
   On note encore f la fonction prolongée, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans le plan muni d'un repère.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine, puis dresser son tableau de variations.
4. Etudier la position $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 10

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$.

Exercice 11

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1-2n}{n^2(1-n)^2}$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}, \qquad \text{et} \qquad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{n+1}.$$
3. Montrer que la série de terme général u_n converge, et déterminer sa somme.

Exercice 13

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ converge.
2. Justifier que $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0;1[, \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + (-1)^n\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t.$
3. Etablir la somme de la série $\sum u_n(x)$, pour tout $x \in [0;1[$.