Exos AL5 - Isométries vectorielles

Exercice 1
Dans les cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes dont la matrice est donnée dans une b.o.n. directe :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} ; \qquad C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} ; \qquad F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, u un vecteur unitaire de E, et $k \in \mathbb{R}$.
On considère l'application $f : E \to E$ telle que :

$$\forall x \in E, f(x) = k(x|u)u + x.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que f soit un automorphisme orthogonal.

2. Déterminer, dans ce cas, les éléments propres de f, et en déduire une interprétation géométrique.

Exercice 3
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $D = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$, et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 4
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan $P : x + 2y + 3z = 0$.

Exercice 5
Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité :

$$\forall (x, y) \in E, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

1. Pour u et v deux vecteurs unitaires de E, calculer $(u + v|u - v)$.

2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ verifiant :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda\|x\|.$$

3. Conclure qu'il existe un automorphisme orthogonal g vérifiant $f = \lambda g$.

Exercice 6
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle orthogonale ?

2. Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Exercice 7
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, r_1 et r_2 deux rotations de E (autres que Id_E) qui commutent (c'est-à-dire $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$).

1. Soit u un vecteur unitaire dirigeant l'axe de rotation de r_1.

a. Montrer que $r_2(u)$ appartient à l'axe de rotation de r_1.

b. En déduire que $r_2(u) = u$ ou $r_2(u) = -u$.

2. Si $r_2(u) = u$, que peut-on en conclure ?

3. On suppose que $r_2(u) = -u$.

a. Montrer que les axes des deux rotations sont orthogonaux.

b. Montrer que r_1 et r_2 sont des retournements autour de leurs axes.

Exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, (M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN).$$

Soient $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $f_\Omega : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_\Omega(M) = \Omega M$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que f_Ω soit un automorphisme orthogonal.

Exercice 9
On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel.
Soit f une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (u unitaire), et d'angle de mesure θ.

1. Montrer que $\forall y \in D^\perp, f(y) = (\cos\theta)y + (\sin\theta)u \wedge y$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = (1 - \cos\theta)(x|u)u + (\cos\theta)x + (\sin\theta)u \wedge x$.

3. Soit s la réflexion par rapport au plan $D^\perp$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3, f \circ s(x) = -(1 + \cos\theta)(x|u)u + (\cos\theta)x + (\sin\theta)u \wedge x$.