Exos AL4 - Espaces préhilbertiens

Exercice 1
Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour f et g dans E, on pose :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2
On se place dans un espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$. Soient a un vecteur unitaire de E, et $k \in \mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que l'application φ définie sur E^2 par :

$$\varphi(x,y) = (x|y) + k(x|a)\,(y|a)$$

soit un produit scalaire.

Exercice 3
On se place dans $E = C^1([-1;1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2, (f|g) = \int_{-1}^1 fg.$$

1. Soient $F = \{f \in E / \forall x \in [-1;0], f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E / \forall x \in [0;1], g(x) = 0\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux entre eux.

2. On note pour tout $i \in [\![0,2]\!]$:

$$f_i : \left| \begin{array}{rl} [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^i \end{array} \right.$$

Calculer la distance de f_2 à $\mathrm{Vect}\{f_0, f_1\}$.

Exercice 4
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien. Soit $F = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1), (-1,2,2)\}$.

1. Donner une équation de F.

2. Donner une base de l'orthogonal de F.

3. Donner le projeté orthogonal de $(1,1,1)$ sur F.

Exercice 5
On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien canonique.

1. On définit $F = \mathrm{Vect}\left\{(1;1;1;0), \left(0;2;0;\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

2. On définit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z = 0 \text{ et } x + 2y + z - t = 0\}$.

a. Déterminer une b.o.n. de G.

b. Calculer la distance de $u = (1,1,1,1)$ à G.

Exercice 6
On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. On muni E du produit scalaire usuel : $\forall (P,Q) \in E^2, (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

a. Déterminer une b.o.n. de $F = \mathrm{Vect}\{X^0, X\}$, et le projeté orthogonal de X^2 sur F.

b. En déduire $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - a - bx)^2 \mathrm{d}x$.

2a. Montrer que l'application φ définie surE^2 par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

est un produit scalaire sur E.
On considère par la suite E muni de ce produit scalaire.

b. Orthonormaliser la base canonique de E.

c. Calculer la distance de X^2 à F.

Exercice 7
Soient E un espace préhilbertien, F et G des sous-espaces vectoriels. Montrer que :

1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;

2. si E est euclidien (de dimension finie), alors $F^{\perp\perp} = F$;

3. si E est euclidien, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 8
On se place dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application φ définie sur E^2 par :

$$\forall (M,N) \in E^2, \varphi(M,N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

3. Orthonormaliser la base $\mathcal{B}$.

4. Expliciter le projeté orthogonal d'une matrice M sur F.

5. Vérifier que $I_2 \in F^\perp$, et retrouver rapidement le résultat précédent.

Exercice 9
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On considère un endomorphisme u de E tel que :

$$\forall x \in E, (u(x)|x) = 0.$$

1. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.