Exos AL0 - Révisions

Exercice 1
Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'espaces usuels, et en déterminer une base.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$

2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x + y = 0) \wedge (x - y + z = 0)\}$

3. $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + y - z + t = 0) \wedge (x - 3y - 2z = 0)\big\}$

4. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = 0\}$

5. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) = P(1) = 0\}$

6. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$

Exercice 2
Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs : $u = (2; 0; 1), v = (1; 3; -2), w = (5; 3; 0), t = (0; 6; -5)$.
Soient $E = \text{Vect}\{u, v\}, F = \text{Vect}\{w, t\}$.

1. Montrer que $E = F$.

2. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$a = (3; 2; 1; 4), b = (2; 2; 2; 6), c = (4; 2; 0; 2), d = (-1; 0; 1; 2), e = (0; 3; 2; 1)$.
Soient $E = \text{Vect}\{b, c, d, e\}, F = \text{Vect}\{a, b, c\}, G = \text{Vect}\{d, e\}$.
Déterminer une base de E, F, G et $F \cap G$.

Exercice 4
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1; 1; 0; -1), v = (1; 0; 0; -1), w = (1; 0; -1; 0)$.
Soient $F = \text{Vect}\{u, v, w\}$ et $G = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z + 2t = 0\big\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base de $F, G, F \cap G, F + G$.

Exercice 5
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ déterminé dans la base canonique (e_1, e_2) par :
$f(e_1) = 2e_1 - e_2$ et $f(e_2) = 4e_1 - 2e_2$.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

2. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6
On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ déterminé dans la base canonique (e_1, e_2) par :
$g(e_1) = e_1 + e_2$ et $g(e_2) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de g.

2. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

Exercice 7
Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z=1 \\ 5x-2y+8z=5 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-z=7 \\ 3x-4y+3z=0 \\ 3x+y=2 \end{cases}$$

Exercice 8
Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9
Déterminer la matrice (dans les bases canoniques), le noyau et l'image des applications linéaires suivantes, et préciser si elles sont injectives ou surjectives :

1. f_1 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_1(x;y;z) = (x;x+y;x+z)$.

2. f_2 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_2(x;y;z) = (x-y;x-z)$.

3. f_3 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_3(x;y;z) = (x+y+z;x-y;2x+z)$.

4. f_4 définie sur $\mathbb{R}^4$ par $f_4(x;y;z;t) = (x-y+z;2x-y;t+z;x+t)$.

5. f_5 définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f_5(1) = 1+X^2; f_5(X) = -X(1+X); f_5(X^2) = 1-X$.

Exercice 10
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $f(e_1) = e_1+e_2+e_3, f(e_2) = e_1+e_3, f(e_3) = -e_1-e_3$.

1. Expliciter la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Soient $\varepsilon_1 = e_1+e_2+e_3, \varepsilon_2 = -e_1+e_2-e_3, \varepsilon_3 = e_2+e_3$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E, et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 11
Soient $E = \mathbb{R}_2[X], P_1 = (X-1)(X-2), P_2 = X(X-2), P_3 = X(X-1), f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f(Q) = Q(0)P_1 + Q(1)P_2 + Q(2)P_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E, puis déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, ainsi que son inverse.

2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, de deux façons différentes.

Exercice 12
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v des endomorphismes de E tels que :

$$E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$

Montrer que ces sommes sont directes.