Exos AN1 - Intégrales généralisées

Exercice 1

1. Etablir la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

Indication : en $+\infty$, on pourra utiliser une intégration par parties.

2. A l'aide d'un changement de variable, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$ **3.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$ **5.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ **6.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Indication : dans le **6**, on pourra effectuer le changement $t = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 3

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^5 \ln(t)}{(1+t^6)^2}\mathrm{d}t.$$

Montrer que I converge, puis que $I = 0$.

Exercice 4

Dans les cas suivants, discuter de la convergence de l'intégrale, en fonction du paramètre a :

1. $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} x^a \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \mathrm{d}x$ **2.** $\displaystyle J = \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^a}\mathrm{d}x$

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{nx+1}{nx^3+1}\mathrm{d}x$$

Après avoir justifié l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 1.$$

Indication : on remarquera que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}.$$

1. Montrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En utilisant l'identité $\dfrac{1}{(1+x^3)^n} = \dfrac{1}{(1+x^3)^{n+1}} + \dfrac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}$, montrer que $I_n = I_{n+1} + \dfrac{1}{3n} I_n$.

3. Exprimer I_n en fonction de n.

Exercice 7

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que les fonctions $t \longmapsto t^2 f(t)^2$ et $t \longmapsto f'(t)^2$ soient intégrables sur $[0;+\infty[$.

1. Montrer que la fonction $t \longmapsto t f(t) f'(t)$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$x f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2 \mathrm{d}t + 2 \int_0^x t f(t) f'(t) \mathrm{d}t.$$

3. En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x)^2 = 0.$$

4. Montrer que $t \longmapsto f(t)^2$ est intégrable sur $[0;+\infty[$.

5. Montrer que :

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 \mathrm{d}t \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 \mathrm{d}t \right).$$

Exercice 8

Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ soit convergente.

1. Donner un exemple où $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

2. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. Que vaut L ?

3. On suppose que f est décroissante.

a. Montrer que f est positive.

b. Justifier que pour tout $x \geq 0$,

$$\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \leq x f(x) \leq 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t$$

et en déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0.$$