Math. - ES 1 - CORRECTION

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **pseudo-inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{array}{ll} (1) & AB = BA \\ (2) & ABA = A \\ (3) & BAB = B \end{array}$$

On dit dans ce cas que B est une pseudo-inverse de A.

1. Soit A une matrice pseudo-inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

a. En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.
$AB_1AB_2 = (AB_1A)B_2 = AB_2$ et $AB_1AB_2 = (AB_1)(AB_2) = (B_1A)(B_2A) = B_1(AB_2A) = B_1A = AB_1$ d'où $AB_2 = AB_1$

b. En déduire que $B_1 = B_2$.
On a : $AB_1 = AB_2 \Rightarrow B_1AB_1 = B_1AB_2 \Rightarrow B_1 = B_1AB_2$
De plus, $AB_1 = AB_2 \Rightarrow B_1A = B_2A \Rightarrow B_1AB_2 = B_2AB_2 = B_2$
D'où $B_1 = B_2$.

Ainsi la matrice A admet une unique pseudo-inverse, appelée la pseudo-inverse de A notée A^*.

2. Montrer que la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
$A = B = 0_n$ vérifient les trois propriétés d'une matrice pseudo-inversible d'où $0_n^* = 0_n$.

3. Montrer que toute matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
$A = P$ et $B = P^{-1}$ vérifient les trois propriétés d'où $P^* = P^{-1}$.

4. Soit N une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad N^p = 0_n \qquad \text{et} \qquad N^{p-1} \neq 0_n$$

On suppose de plus que N est pseudo-inversible.

a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $N^*N^k = N^{k-1}$.
Pour $k \geq 2$: $N^*N^k = (N^*N)N^{k-1} = (NN^*)NN^{k-2} = (NN^*N)N^{k-2} = NN^{k-2} = N^{k-1}$.

b. En déduire que N n'est pas pseudo-inversible.
On remarque tout d'abord que $p \geq 2$ car $N \neq 0_n$. Alors, si N était pseudo-inversible, pour $k = p$, le résultat précédent donnerait : $N^*N^p = N^{p-1}$ or $N^p = 0_3$ et $N^{p-1} \neq 0_3$ on a donc une contradiction.
On en déduit que N n'est pas pseudo-inversible.

c. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. N peut-elle être pseudo-inversible ?
$N \neq 0_2$ et $N^2 = 0_2$ donc d'après la question précédente, N n'est pas pseudo-inversible.

5. a. Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que D est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse. On pourra distinguer les éléments diagonaux nuls des autres.
On note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, si $\lambda_i \neq 0$ on note $\mu_i = \dfrac{1}{\lambda_i}$ et si $\lambda_i = 0$, on note $\mu_i = 0$.
Alors la matrice $\operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ vérifie les propriétés de la pseudo-inverse de D.

b. Soient P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que A est pseudo-inversible et exprimer A^* en fonction de D^* et P.
La matrice PD^*P^{-1} vérifie les trois propriétés.

EXERCICE 2

On donne les valeurs approchées suivantes : $\mathrm{e} \simeq 2,72$; $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \simeq 0,61$; $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\ln(3) \simeq 1,10$

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x^2} - 1$$

1. Étudier la variations de f sur $\mathbb{R}$.
Les théorèmes généraux donnent f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2}(1-2x^2)$.
On en déduit que f est décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$ et qu'elle est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

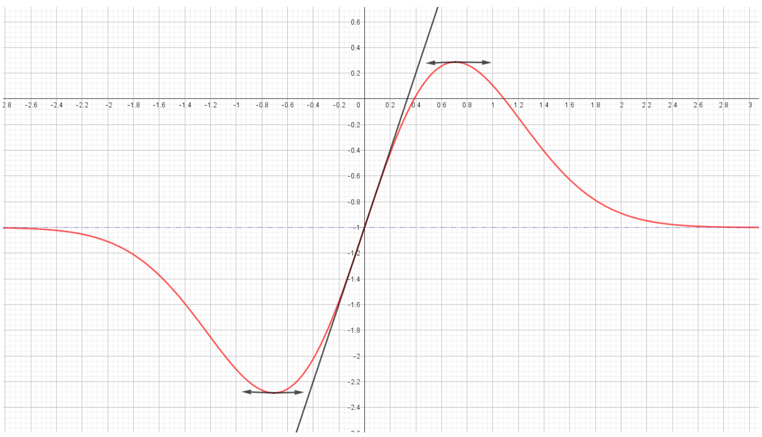
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine, et préciser les éventuelles asymptotes à sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
Le théorème des croissances comparées donne $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$.
On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -1$ pour asymptote en $\pm\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$\simeq -2.28$	$\nearrow$	$\simeq 0.28$	$\searrow$	-1

4. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0, et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.
L'équation de la tangente est $y = 3x - 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - (3x-1) = 3x\left(\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right)$;
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2 \leq 0$, donc $\quad \mathrm{e}^{-x^2} - 1 \leq 0 \quad$ et $\quad f(x) - (3x-1) \quad$ est du signe opposé à celui de x.
Ainsi, la courbe est au-dessus de la tangente sur $\mathbb{R}^-$ et en-dessous sur $\mathbb{R}^+$.

5. Donner l'allure de la courbe de f.



II. Etude d'une équation différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle :

$$xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$$

Soit H_n l'équation homogène associée à E_n.

1. Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.

$$\int^x \frac{n - 2t^2}{t} \mathrm{d}t = n \ln|x| - x^2 + C^{te}$$

Donc les solutions de H_n sur $I \in \{\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*\}$ sont les fonctions de la forme $y_0 : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx^n \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right.$, où $C \in \mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.

$x \mapsto -1$ est une solution triviale de E_n. On en déduit l'ensemble des solutions de E_n sur I :
$S = \left\{ x \mapsto -1 + Cx^n \mathrm{e}^{-x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}$

3. Donner toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$.
On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.
Il s'agit ici de déterminer parmi les solutions trouvées à la question précédente celles qui se recollent en 0 pour former une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Les solutions définies sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de classe C^∞ sur leur intervalle de définition. Pour trouver les fonctions y solutions sur $\mathbb{R}$, il faut réussir à prolonger les solutions en 0, et à les rendre dérivable en 0.
On remarque tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 0^-} Cx^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} Cx^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1 = -1$ et cela quelle que soit la constante C. Le recollement sera donc toujours continu en 0 en prenant $y(0) = -1$, quelles que soient les constantes choisies sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement différentes).
De plus, si $x > 0$ ou $x < 0$, on aura $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = Cx^{n-1} \mathrm{e}^{-x^2}$ qui admet toujours une limite en 0^+ et en 0^- égale à 0 si $n \geq 2$ et à C si $n = 1$. On en déduit que pour $n = 1$, il faudra prendre la même constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ pour assurer la dérivabilité en 0.
Ainsi, si $n = 1$, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Cx\mathrm{e}^{-x^2} - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$
et si $n \geq 2$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto \begin{cases} C_1 x^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1 & \text{si } x > 0 \\ C_2 x^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

III. Etude de deux suites

On suppose désormais que $n \geq 2$. On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 3x^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1$$

1. Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

$f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1 > 0$.

2. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Les théorèmes généraux donnent f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = 3(n - 2x^2)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}$.
Sur $\mathbb{R}^+$, $f_n'(x)$ est du signe de $n - 2x^2$. On en déduit que f_n est croissante sur $\left[0; \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}; +\infty\right[$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -1$, par croissances comparées.

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
f_n	-1	$\simeq 0.10$	-1

3. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n tel que $u_n < 1 < v_n$.

La fonction f_n est continue, strictement monotone sur $\left[0; \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$; elle est donc bijective sur cet intervalle, avec $f_n(0) < 0$ et $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geq f(1) > 0$. D'après le théorème de bijection, f_n s'annule donc une unique fois entre 0 et $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Comme de plus $f_n(1) > 0$, cette valeur d'annulation est comprise entre 0 et 1.

De même, f_n est bijective sur $\left[\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty\right[$, avec $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(a) = -1$, donc f_n s'annule une unique fois sur cet intervalle.

4. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

On a montré à la question précédente que $v_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

5. a. Expliciter $\mathrm{e}^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

Par définition de u_n, $f_n(u_n) = 0$, on a donc $3u_n^n \mathrm{e}^{-u_n^2} = 1$, d'où : $\mathrm{e}^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$.

b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

On a : $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}\mathrm{e}^{-u_n^2} - 1 = \dfrac{3u_n^{n+1}}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1$.
On sait par ailleurs que $u_n < 1$; on en déduit que $f_{n+1}(u_n) < 0$.

c. Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et d'après le résultat précédent, $f_{n+1}(u_n) < 0$.
On a donc $f_{n+1}(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_n)$ et comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ auquel appartiennent u_n et u_{n+1}, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$, et par suite, que la suite (u_n) est croissante.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

6. Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$$

a. Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0 \Leftrightarrow f_n(t) = 0$.

$$\forall t > 0, \qquad g_n(t) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{g_n(t)} = 1 \Leftrightarrow 3t^n\mathrm{e}^{-t^2} = 1 \Leftrightarrow f_n(t) = 0$$

b. On suppose que $L \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède, et conclure quant à la limite de la suite (u_n).

Si $L \neq 1$, comme (u_n) est positive, croissante et majorée par 1, on a nécessairement $0 < L < 1$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = -\infty$, et $\lim_{n\to+\infty} \ln(3) + n\ln(u_n) - u_n^2 = -\infty$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$, $\ln(3) + n\ln(u_n) - u_n^2 = g_n(u_n) = 0$ car $f_n(u_n) = 0$.
On a donc une contradiction, et on en déduit que $L = 1$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on note F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Soient $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$.

1. Montrer que $A \in F \cap G$.

$A^2 = A$ donc $A \in G$ et les coefficients de A satisfont les conditions d'appartenance à F.

2. La matrice A est-elle inversible ?

Si A était inversible, on aurait : $A^2 = A \Rightarrow AAA^{-1} = AA^{-1} \Rightarrow A = \mathrm{I}_3$. Donc A n'est pas inversible.

3. a. Montrer que

$$M \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{array} \right.$$

$$M \in G \Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{array} \right.$$

b. En déduire que

$$F \cap G = \{\mathrm{I}_3, 0_3, A, \mathrm{I}_3 - A\}$$

$$M \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + 2b^2 = a \\ (b = 0) \quad \vee \quad (b = 1 - 2a) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 = a \\ b = 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} 9a^2 - 9a + 2 = 0 \\ b = 1 - 2a \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{2}{3} \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow M \in \{0_3, \mathrm{I}_3, A, \mathrm{I}_3 - A\}$$

4. On note $B = \mathrm{I}_3 - A$.

a. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \alpha A + \beta B$$

$$\alpha A + \beta B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta \end{pmatrix} \text{ donc } M = \alpha A + \beta B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 3a \\ -\alpha + \beta = 3b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = a - b \\ \beta = a + 2b \end{array} \right.$$

b. Calculer AB et BA.

$AB = BA = 0_3$.

c. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et il a déjà été démontré pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$; $\qquad (M^n = \alpha^n A + \beta^n B)$

$$\Rightarrow \left(M^{n+1} = (\alpha A + \beta B)(\alpha^n A + \beta^n B) = \alpha^{n+1}\underbrace{A^2}_{=A} + \alpha\beta^n\underbrace{AB}_{=0_3} + \beta\alpha^n\underbrace{BA}_{=0_3} + \beta^{n+1}\underbrace{B^2}_{=B} = \alpha^{n+1}A + \beta^{n+1}B \right)$$

Le résultat est ainsi montré par principe de récurrence.

5. Montrer que M est inversible si, et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

A et B n'étant pas inversibles, les cas $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ donnent immédiatement M non inversible.
Si $\alpha\beta \neq 0$ alors $M\left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right) = (\alpha A + \beta B)\left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right) = A^2 + \frac{\alpha}{\beta}AB + \frac{\beta}{\alpha}BA + B^2 = A + B = \mathrm{I}_3$.
Ainsi, dans ce cas M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B$.

6. Si $\alpha\beta \neq 0$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(M^{-1}\right)^n = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$$

Le cas $n = 0$ est immédiat et le cas $n = 1$ a été démontré à la question précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}$;
$\left(M^{-1}\right)^n = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B \Rightarrow \left(M^{-1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right)\left(\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B\right) = \alpha^{-(n+1)}A + \beta^{-(n+1)}B$
Le résultat est ainsi montré par principe de récurrence.

7. Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère alors la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y$.

a. A l'aide de la question **4.**, exprimer la matrice T à l'aide de A et B.

$T = 2A + 5B$.

b. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera, telle que $L = TL + Y$.

$L = TL + Y \Leftrightarrow (\mathrm{I}_3 - T)L = Y$
$\mathrm{I}_3 - T \in F$ et d'après la question **4.**, $\mathrm{I}_3 - T = -A - 4B$ donc, d'après la question **6.** $(\mathrm{I}_3 - B)$ est inversible et $(\mathrm{I}_3 - B)^{-1} = -A - \frac{1}{4}B = -\frac{3}{4}A - \frac{1}{4}\mathrm{I}_3$.
On a donc l'existence et l'unicité de L telle que $L = TL + Y$, donnée par $L = (\mathrm{I}_3 - T)^{-1}Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} - L = T(X_n - L)$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = L + T^n(X_0 - L)$$

Pour $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y = TX_n + L - TL \Leftrightarrow X_{n+1} - L = T(X_n - L)$
Une récurrence immédiate donne le second résultat.

d. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.

$T = 2A + 5B$ donc d'après la question **4.c**, $T^n = 2^nA + 5^nB$ d'où : $X_n = L + (2^nA + 5^nB)(X_0 - L)$

D'où : $X_n = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{3}\left(2^{n+1} + 5^n\right) \\ 1 + \frac{2}{3}\left(-2^n + 5^n\right) \\ \frac{2}{3}\left(-2^n + 5^n\right) \end{pmatrix}$

EXERCICE 4

On note f la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ par

$$f(z)=\frac{z-\frac{7}{4}-\mathrm{i}}{z-1}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

1. a. Montrer que les images par f sont dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\quad (f(z)=1)\Leftrightarrow\left(z-\dfrac{7}{4}-\mathrm{i}=z-1\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{7}{4}+\mathrm{i}=1\right)$; ce résultat étant toujours faux, on en déduit que : $\quad\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\quad f(z)\neq 1\quad$ donc que f est à valeurs dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

b. Montrer que $\forall Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\exists z\in\mathbb{C}\setminus\{1\},f(z)=Z$.

Soit $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$; pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ on a :
$f(z)=Z\Leftrightarrow\dfrac{z-\frac{7}{4}-\mathrm{i}}{z-1}=Z\Leftrightarrow z(Z-1)=Z-\dfrac{7}{4}-\mathrm{i}\Leftrightarrow z=f(Z)$

Que remarque-t-on ?
Le résultat obtenu montre que f établit une bijection entre $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et lui-même et que la bijection réciproque de f sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ est f elle-même.

2. a. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ pour $z\neq 1$.
On donnera l'expression à l'aide de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

En notant $z=x+\mathrm{i}y$ avec, $x,y\in\mathbb{R}$, on obtient :
$f(z)=\dfrac{x^2-\frac{11}{4}x+y^2-y+\frac{7}{4}}{(x-1)^2+y^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{-x+\frac{3}{4}y+1}{(x-1)^2+y^2}$.

b. Déterminer les complexes z tels que $f(z)\in\mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique simple.

$f(z)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{-x+\frac{3}{4}y+1}{(x-1)^2+y^2}=0\Leftrightarrow -x+\dfrac{3}{4}y+1=0$; on reconnait l'équation d'une droite.

<u>*Remarque :*</u> Si on considère le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1=\dfrac{7}{4}+\mathrm{i}$ et le point M_2 d'affixe $z_2=1$, on a pour $z\neq 1$, $M\neq M_2$ et $f(z)=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, ainsi, $f(z)\in\mathbb{R}$ équivaut à $z=0$ ou $\arg(f(z))\equiv 0\,[\pi]$ donc soit $M=M_1$, soit $\left(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1}\right)\equiv 0\,[\pi]$;
on en déduit que la droite trouvée est la droite (M_1M_2), privée du point M_2.

c. Déterminer les complexes z tels que $f(z)\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $f(z)$ est un imaginaire pur).
Donner une interprétation géométrique simple.

$f(z)\in\mathrm{i}\,\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{x^2-\frac{11}{4}x+y^2-y+\frac{7}{4}}{(x-1)^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2-\dfrac{11}{4}x+y^2-y+\dfrac{7}{4}=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{11}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{64}$
C'est l'équation du cercle de centre le point d'affixe $\quad\dfrac{11}{8}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\quad$ et de rayon $\quad\dfrac{5}{8}$.
<u>*Remarque :*</u> Avec les même notations que précédemment, on a $f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R}$ équivaut à $z=0$ ou $\arg(f(z))\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ donc soit $M=M_1$, soit $\left(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$;
on en déduit que le cercle trouvé est le cercle de diamètre $[M_1M_2]$, privé du point M_2.

d. Déterminer les complexes z tels que $f(z)\in\mathbb{U}$ (c'est-à-dire $|f(z)|=1$).
Donner une interprétation géométrique simple.

$f(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{7}{4} - \mathrm{i}\right|^2 = |z-1|^2 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{7}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x + 2y - \dfrac{49}{16} = 0$
On reconnait l'équation d'une droite.
Remarque : Toujours avec les mêmes notations,, $\left|z - \dfrac{7}{4} - \mathrm{i}\right| = |z-1|$ équivaut à $MM_1 = MM_2$;
on en déduit que la droite trouvée est la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ d'équation $f(z) = z$.
On obtiendra deux solutions notées a et b avec $\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$.

$f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2z + \dfrac{7}{4} + \mathrm{i} = 0.$
On doit résoudre une équation du second degré avec $\Delta = -3 - 4\mathrm{i} = (1-2\mathrm{i})^2$.
On obtient : $\quad a = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i} \quad$ et $\quad b = \dfrac{3}{2} - \mathrm{i}$.

b. Calculer $\dfrac{a-1}{b-1}$; $\qquad \dfrac{a-1}{b-1} = -1$

c. Montrer que si $z \notin \{1; a\}$ alors
$$\frac{b - f(z)}{a - f(z)} = -\frac{b-z}{a-z}$$
Pour $z \notin \{1; a\}$, sachant que $a = f(a)$ et $b = f(b)$, on a :
$$\frac{b - f(z)}{a - f(z)} = \frac{\frac{b - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)}{b-1} - \frac{z - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)}{z-1}}{\frac{a - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)}{a-1} - \frac{z - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)}{z-1}} = \frac{(z-1)\left(b - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)\right) - (b-1)\left(z - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)\right)}{(z-1)\left(a - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)\right) - (a-1)\left(z - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)\right)} \times \frac{(a-1)(z-1)}{(b-1)(z-1)}$$
$$= -\frac{\left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\right)b - \left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\right)z}{\left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\right)a - \left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\right)z} = -\frac{b-z}{a-z}$$

4. Dans $\mathscr{R}$, on note A le point d'affixe a, B le point d'affixe b et C le point d'affixe 1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

On admettra que quatre points distincts du plan N_1, N_2, N_3, N_4 sont sur une même droite ***ou*** *sur un même cercle si et seulement si*
$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \left(\overrightarrow{N_3N_1}, \overrightarrow{N_3N_2}\right) = \left(\overrightarrow{N_4N_1}, \overrightarrow{N_4N_2}\right) + k\pi$$

a. Vérifier que A, B et C sont alignés.

On a montré que $a - 1 = -(b-1)$ donc $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}$ et les points A, B et C sont alignés.

b. Justifier que si $M \notin \{A, B, C\}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + k\pi$.

Si $M \notin \{A, B, C\}$, $z \notin \{1; a; b\}$ donc d'après le **3b.**, $\exists p \in \mathbb{Z}, \quad \arg\left(\dfrac{b - f(z)}{a - f(z)}\right) = \pi + \arg\left(\dfrac{b-z}{a-z}\right) + 2p\pi$;
on en déduit l'existence de $k \in \mathbb{Z}$, tel que $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + k\pi$

Que peut-on en déduire géométriquement ?

On en déduit que les points A, B, M et M' sont soit alignés, soit cocycliques.

c. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}\right) + 2k\pi$

Pour $z \neq 1$ on a : $\quad \dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\left(z - \left(\frac{7}{4}+\mathrm{i}\right)\right) - (z-1)}{(z-1)^2} = \dfrac{-\frac{3}{4} - \mathrm{i}}{(z-1)^2} = \dfrac{(b-1)^2}{(z-1)^2} = \left(\dfrac{b-1}{z-1}\right)^2$
$z \neq 1$ et $f(z) \neq 1$; on a donc l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z-1}\right) = 2\arg\left(\dfrac{b-1}{z-1}\right) + 2k\pi$
c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}\right) + 2k\pi$

d. En déduire une construction géométrique simple de M' lorsque M n'est pas sur la droite (AB).

D'après la question **4b.**, si les points M, A et B ne sont pas alignés, les points A, B, M et M' sont cocycliques. Ainsi, les points A, B, C et M étant placés, on construit les cercle circonscrit au triangle ABM, et on place sur ce cercle le point M' tel que $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}\right)$

Faire une figure.