Math. - ES 1 -

Lundi 15 janvier 2024 - Durée 4 h

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **pseudo-inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} (1) &\quad AB = BA \\ (2) &\quad ABA = A \\ (3) &\quad BAB = B \end{aligned}$$

On dit dans ce cas que B est une pseudo-inverse de A.

1. Soit A une matrice pseudo-inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et B_1 et B_2 deux pseudo-inverses de A.

a. En calculant AB_1AB_2 de deux façons différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.

b. En déduire que $B_1 = B_2$.

Ainsi la matrice A admet une unique pseudo-inverse, appelée la pseudo-inverse de A notée A^*.

2. Montrer que la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

3. Montrer que toute matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.

4. Soit N une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \quad N^p = 0_n \qquad \text{et} \qquad N^{p-1} \neq 0_n$$

On suppose de plus que N est pseudo-inversible.

a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2, N^*N^k = N^{k-1}$.

b. En déduire que N n'est pas pseudo-inversible.

c. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. N peut-elle être pseudo-inversible ?

5. a. Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que D est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse. On pourra distinguer les éléments diagonaux nuls des autres.

b. Soient P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que A est pseudo-inversible et exprimer A^* en fonction de D^* et P.

EXERCICE 2

On donne les valeurs approchées suivantes : $\mathrm{e} \simeq 2,72$; $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \simeq 0,61$; $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\ln(3) \simeq 1,10$

I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x\mathrm{e}^{-x^2} - 1$$

1. Étudier la variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine, et préciser les éventuelles asymptotes à sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

3. Dresser le tableau de variations de f.

4. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0, et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

5. Donner l'allure de la courbe de f.

II. Étude d'une équation différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E_n l'équation différentielle :

$$xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$$

Soit H_n l'équation homogène associée à E_n.

1. Résoudre H_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

2. En déduire les solutions de E_n sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3. Donner toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et solutions de E_n sur $\mathbb{R}$.
On distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.
Il s'agit ici de déterminer parmi les solutions trouvées à la question précédente celles qui se recollent en 0 pour former une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III. Etude de deux suites

On suppose désormais que $n \geq 2$. On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 3x^n \mathrm{e}^{-x^2} - 1$$

1. Quel est le signe de $f_n(0)$, de $f_n(1)$?

2. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n tel que $u_n < 1 < v_n$.

4. Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 2}$?

5. a. Expliciter $\mathrm{e}^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.

b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.

c. Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.

6. Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$$

a. Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0 \Leftrightarrow f_n(t) = 0$.

b. On suppose que $L \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède, et conclure quant à la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on note F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Soient $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$.

1. Montrer que $A \in F \cap G$.

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. a. Montrer que

$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

b. En déduire que

$$F \cap G = \{\mathrm{I}_3, 0_3, A, \mathrm{I}_3 - A\}$$

4. On note $B = \mathrm{I}_3 - A$.

a. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \alpha A + \beta B$$

b. Calculer AB et BA.

c. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

5. Montrer que M est inversible si, et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

6. Si $\alpha\beta \neq 0$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(M^{-1}\right)^n = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$$

7. Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère alors la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y$.

a. A l'aide de la question **4.**, exprimer la matrice T à l'aide de A et B.

b. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera, telle que $L = TL + Y$.

c. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} - L = T(X_n - L)$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = L + T^n(X_0 - L)$$

d. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.

EXERCICE 4

On note f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par

$$f(z) = \frac{z - \frac{7}{4} - \mathrm{i}}{z - 1}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

1. a. Montrer que les images par f sont dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

b. Montrer que $\forall Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \exists z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, f(z) = Z$.
Que remarque-t-on ?

2. a. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ pour $z \neq 1$.
On donnera l'expression à l'aide de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

b. Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique simple.

c. Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $f(z)$ est un imaginaire pur).
Donner une interprétation géométrique simple.

d. Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ (c'est-à-dire $|f(z)| = 1$).
Donner une interprétation géométrique simple.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.
On obtiendra deux solutions notées a et b avec $\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$.

b. Calculer $\dfrac{a-1}{b-1}$.

c. Montrer que si $z \notin \{1; a\}$ alors

$$\frac{b - f(z)}{a - f(z)} = -\frac{b - z}{a - z}$$

4. Dans $\mathscr{R}$, on note A le point d'affixe a, B le point d'affixe b et C le point d'affixe 1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

On admettra que quatre points distincts du plan N_1, N_2, N_3, N_4 sont sur une même droite ***ou*** *sur un même cercle si et seulement si*

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \left(\overrightarrow{N_3N_1}, \overrightarrow{N_3N_2}\right) = \left(\overrightarrow{N_4N_1}, \overrightarrow{N_4N_2}\right) + k\pi$$

a. Vérifier que A, B et C sont alignés.

b. Justifier que si $M \notin \{A, B, C\}$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) + k\pi$.
Que peut-on en déduire géométriquement ?

c. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}\right) + 2k\pi$

d. En déduire une construction géométrique simple de M' lorsque M n'est pas sur la droite (AB).
Faire une figure.