Math. - ES 2

EXERCICE 1

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^3-n}$, pour $n \geq 2$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

On a : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$.

$\sum \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum u_n$ converge par comparaison de séries positives.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^3-X}$.

$F = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{1}{2(X+1)}$

3. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$.

D'après la question précédente, on a :

$\forall n \geq 2, \quad u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right) = v_{n+1} - v_n \quad$ où $\quad v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}\right)$.

$\sum u_n$ est donc une série télescopique.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on en déduit que $\sum u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n = -v_2 = \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction F définie sur $[0,1[$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{(1-t)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est dérivable sur $[0,1[$ et donner l'expression de $F'(x)$ pour $x \in [0,1[$.

$x \mapsto \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x^2)}$ est continue sur $[0,1[$; on en déduit que F est dérivable sur $[0,1[$ d'après le théorème fondamental de l'intégration, et que $\forall x \in [0,1[, F'(x) = \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x^2)}$.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{X^3}{(1-X)(1+X^2)}$, et en déduire l'expression de $F(x)$ pour $x \in [0,1[$.

$\dfrac{X^3}{(1-X)(1+X^2)} = -1 + \dfrac{1}{2(1-X)} + \dfrac{1-X}{2(1+X^2)}$

On écrit, pour $x \in [0,1[, F'(x) = -1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+x^2}$ et on obtient :

$\forall x \in [0,1[, \quad F(x) = -x - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x)$

3. Effectuer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $F(x)$.

$F(x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{1}{2}\left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{x^3}{3}\right) + o(x^3)$ d'où $F(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$.

4. Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un équivalent de $F'(x)$ au voisinage de 0.

$F'(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ donc $F'(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$; le théorème de primitivation donne $F(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)$ (car $F(0) = 0$).

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. a. A l'aide d'une comparaison somme - intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$$

La fonction inverse étant décroissante sur $]0, +\infty[$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ainsi, par la relation de Chasles, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{n+1} - 1 \leq \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq S_n$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$.

b. En déduire un encadrement de $\dfrac{S_n}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$, puis un équivalent de S_n au voisinage de $+\infty$.

On déduit du résultat précédent que pour $n \geq 2$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \dfrac{S_n}{\ln(n)} \leq \dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)}$.

Comme $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln(n)} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$, puis que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

a. Montrer que la série de terme général u_n est convergente. On note γ sa somme.

On a $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc $u_n \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum u_n$ converge, par comparaison de séries positives.

b. Montrer que :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma$, ce qu'on peut écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \circ(1)$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = S_n - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \underset{\text{téléscopage}}{=} S_n - \ln(n+1) = S_n - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et comme

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, on a alors $S_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \circ(1)$

On conclut que $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$.

3. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2 S_n}$.

D'après ce qui précède, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2 S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

$\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente, $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2 S_n}$ converge, par comparaison de séries positives.

PROBLÈME

Dans tout le problème, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Un mobile se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, ... , N d'un axe gradué selon les règles suivantes :

– à l'instant 0, il se trouve en un des points d'abscisse 0, 1, ... , N ;

– pour tout entier i compris au sens large entre 1 et $(N-1)$, si le mobile est au point d'abscisse i à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors il se trouve à l'instant $(n+1)$ au point d'abscisse $(i+1)$ avec la probabilité $\dfrac{i}{N}$, et au point d'abscisse $(i-1)$ avec la probabilité $\dfrac{N-i}{N}$;

– si le mobile se trouve à l'origine à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste à l'origine à l'instant suivant ;

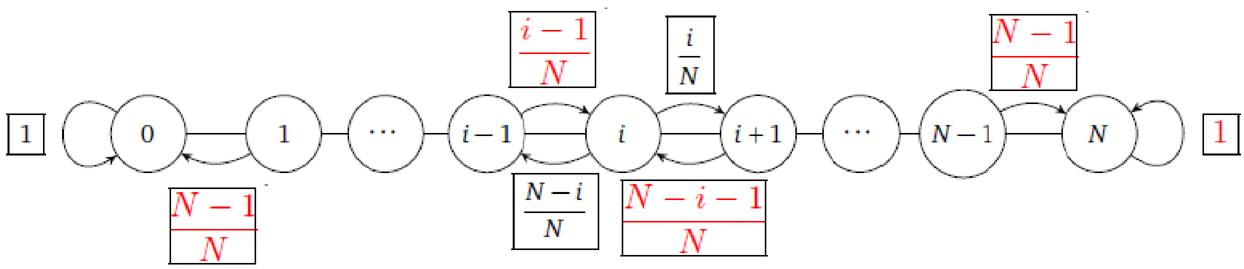
– si le mobile se trouve au point d'abscisse N à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste en ce point à l'instant suivant.

I. Étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette première partie, le mobile se trouve au point d'abscisse 1 à l'instant initial 0.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne l'abscisse du mobile à l'instant n ; de plus, on définit la matrice colonne U_n par :
$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$$
où $\mathbb{P}(X_n = k)$ désigne la probabilité de l'événement $(X_n = k)$.

1. Reproduire et compléter le schéma ci-dessous par les probabilités conditionnelles manquantes (au nombre de 5) indiquées par un cadre vide.



2. Déterminer la loi de probabilité de X_1 , X_2 et X_3 (on pourra remarquer que, pour X_3, il convient de distinguer les cas $N = 3$ et $N \geqslant 4$).

- Le mobile étant en 1 à l'instant initial $n = 0$, il ne peut être qu'en 0 ou 2 à l'instant $n = 1$.
  Les probabilités conditionnelles données par l'énoncé donnent :
  $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \dfrac{N-1}{N}$, $\quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \dfrac{1}{N}$, $\quad$ les autres probabilités sont nulles.
- Le mobile se trouve en 0 ou en 2 à l'instant $n = 1$. Ainsi les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 2)$ constituent un système complet d'événements. De plus, le mobile se trouvant en 0 ou 2 à l'instant $n = 1$, il ne peut se trouver à l'instant $n = 2$ qu'en 0, 1 ou 3.
  La formule des probabilités totales donne :
  $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_2 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 \times \dfrac{N-1}{N} + 0 = \dfrac{N-1}{N}$
  $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 2) = 0 + \dfrac{N-2}{N} \times \dfrac{1}{N} = \dfrac{N-2}{N^2}$
  $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 3)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_2 = 3)\mathbb{P}(X_1 = 2) = 0 + \dfrac{2}{N} \times \dfrac{1}{N} = \dfrac{2}{N^2}$
  Les autres probabilités sont nulles.
- Le mobile se trouve en 0, 1 ou 3 à l'instant $n = 2$. Ainsi les événements $(X_2 = 0), (X_2 = 1)$ et $(X_2 = 3)$ constituent un système complet d'événements. De plus, le mobile se trouvant en 0, 1 ou 3 à l'instant $n = 2$, il ne peut se trouver à l'instant $n = 3$ qu'en 0, 2 ou 3 si $N = 3$ et en 0, 2 ou 4 si $N \geq 4$.

La formule des probabilités totales donne :
$\mathbb{P}(X_3=0)=\mathbb{P}_{(X_2=0)}(X_3=0)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=0)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=0)\mathbb{P}(X_2=3)$
$=1\times\dfrac{N-1}{N}+\dfrac{N-1}{N}\times\dfrac{N-2}{N^2}+0=\dfrac{N^3-3N+2}{N^3}$
$\mathbb{P}(X_3=2)=$
$\mathbb{P}_{(X_2=0)}(X_3=2)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=2)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=2)\mathbb{P}(X_2=3)$
$=0+\dfrac{1}{N}\times\dfrac{N-2}{N^2}+\dfrac{N-3}{N}\times\dfrac{2}{N^2}=\dfrac{3N-8}{N^3}$

$\rightsquigarrow$ SI $N=3$ on a : $\mathbb{P}(X_3=3)=$
$\mathbb{P}_{(X_2=0)}(X_3=3)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=3)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=3)\mathbb{P}(X_2=3)$
$=0+0+1\times\dfrac{2}{N^2}=\dfrac{2}{9}$
Les autres probabilités sont nulles .

$\rightsquigarrow$ SI $N\geq 4$: $\mathbb{P}(X_3=4)=$
$\mathbb{P}_{(X_2=0)}(X_3=4)\mathbb{P}(X_2=0)+\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=4)\mathbb{P}(X_2=1)+\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=4)\mathbb{P}(X_2=3)$
$=0+0+\dfrac{3}{N}\times\dfrac{2}{N^2}=\dfrac{6}{N^3}$
Les autres probabilités sont nulles.

3. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout entier k compris au sens large entre 0 et N, exprimer chacune des probabilités $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X_n=0)$, $\mathbb{P}(X_n=1)$, ... , $\mathbb{P}(X_n=N)$.
Lorsque $N\geqslant 4$, on sera amené à distinguer les cas $k=0$, $k=1$, $2\leqslant k\leqslant N-2$, $k=N-1$ et $k=N$.

La famille $(X_n=k)_{0\leq k\leq N}$ constitue un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne : $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=i)$

- Pour $k=0$, le mobile ne peut venir que de 0 ou 1 et on a :
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\mathbb{P}(X_n=0)+\dfrac{N-1}{N}\mathbb{P}(X_n=1)$
- Pour $k=1$, le mobile ne peut venir que de 2 et on a :
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\dfrac{N-2}{N}\mathbb{P}(X_n=2)$
- Pour $k=N-1$, le mobile ne peut venir que de $N-2$ et on a :
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=N-1)=\dfrac{N-2}{N}\mathbb{P}(X_n=N-2)$
- Pour $k=N$, le mobile ne peut venir que de $N-1$ ou N et on a :
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=N)=\dfrac{N-1}{N}\mathbb{P}(X_n=N-1)+\mathbb{P}(X_n=N)$
- Si $N\geq 4$, pour $2\leq k\leq N-2$, le mobile ne peut venir que de $k-1$ ou $k+1$ et on a :
  $\mathbb{P}(X_{n+1}=k)=\dfrac{k-1}{N}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\dfrac{N-k-1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)$

b. En déduire une matrice M telle que, pour tout entier naturel n, on ait : $U_{n+1}=M\,U_n$.
On précisera clairement la valeur et la position des termes non nuls de la matrice M.

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)+\dfrac{N-1}{N}\mathbb{P}(X_n=1)\\ \dfrac{N-2}{N}\mathbb{P}(X_n=2)\\ \vdots\\ \dfrac{k-1}{N}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\dfrac{N-k-1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1)\\ \vdots\\ \dfrac{N-2}{N}\mathbb{P}(X_n=N-2)\\ \dfrac{N-1}{N}\mathbb{P}(X_n=N-1)+\mathbb{P}(X_n=N)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\\ \mathbb{P}(X_n=2)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(X_n=k-1)\\ \mathbb{P}(X_n=k)\\ \mathbb{P}(X_n=k+1)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(X_n=N-2)\\ \mathbb{P}(X_n=N-1)\\ \mathbb{P}(X_n=N)\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \frac{N-1}{N} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-3}{N} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k-1}{N} & 0 & \frac{N-k-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{N-3}{N} & 0 & \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{N-1}{N} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \Leftarrow k \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccc} & & & & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & & & \\ & & & & k-1 & k & k+1 & & & \end{array} & \end{array}$$

4. Dans cette question 4, et elle seule, on pose $N = 3$. On admet que $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont M est la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$, et soit $\mathscr{B}$ la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,-1,-1,1)$, $u_3 = (1,-2,2,-1)$, $u_4 = (0,0,0,1)$.

a. Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}$. Expliciter alors une matrice P telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la famille est libre de cardinal 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ à savoir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. Calculer P^{-1} (le détail des calculs devra figurer sur la copie).

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

c. Expliciter la deuxième colonne de la matrice M^n ($n \in \mathbb{N}$).

Une récurrence immédiate donne pour $n \geq 0, M^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Sa deuxième colonne est $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 - \frac{2}{3^n} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{2}{3^n} + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{2}{3^n} - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ -\frac{2}{3^n} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1 \end{pmatrix}$

d. Pour tout n de $\mathbb{N}$, déduire de la question précédente la loi de X_n.
Vérifier que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{3}{4}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{4}$.
Une récurrence immédiate donne, pour $n \geq 0$: $U_n = M^nU_0$.

Comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on retrouve la deuxième colonne de M^n. On a donc :

$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2 \times 3^n} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ qui a pour limite $\frac{3}{4}$ quand n tend vers $+\infty$;
$\mathbb{P}(X_n = 3) = -\frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$ qui a pour limite $\frac{1}{4}$ quand n tend vers $+\infty$.

II. Étude de l'arrêt du mobile

Pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on note :
- p_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse N en partant initialement du point d'abscisse i ;
- q_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse 0 en partant initialement du point d'abscisse i.

D'autre part, on dira qu'une $(N+1)$-liste $(u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N)$ de nombres réels possède la propriété $(\mathscr{P})$ si :

$$\text{pour tout entier } i \text{ compris au sens large entre 1 et } (N-1),\ u_i = \frac{i}{N}u_{i+1} + \frac{N-i}{N}u_{i-1}.$$

1. a. Préciser les valeurs de p_0, p_N, q_0 et q_N.
$p_0 = 0, \quad p_N = 1, \quad q_0 = 1, \quad q_N = 0.$

b. Justifier d'une phrase que la $(N+1)$-liste $(p_0,\ p_1,\ ...,\ p_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.
Finir en N en partant de i revient à finir en N en partant de $i-1$ puis en allant en i (avec la probabilité $\frac{i}{N}$) ou finir en N en partant de $i+1$ puis en allant en i (avec la probabilité $\frac{N-i}{N}$).

2. Soit $(u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N)$ une $(N+1)$-liste de nombres réels possédant la propriété $(\mathscr{P})$.

a. Exprimer $u_{i+1} - u_i$ en fonction de $u_i - u_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant N-1)$.
En déduire que la suite $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ est monotone.
$u_{i+1} - u_i = \dfrac{N}{i}u_i - \dfrac{N-i}{i}u_{i-1} - u_i = \dfrac{N-i}{i}(u_i - u_{i-1})$.
Comme pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$, $\dfrac{N-i}{i} \geq 0$ on en déduit que $u_{i+1} - u_i$ et $u_i - u_{i-1}$ sont de même signe donc que la suite est monotone.

b. Que peut-on dire des nombres $u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N$ si $u_0 = u_N$?
La suite $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ est monotone donc si $u_0 = u_N$ alors elle est constante.

3. En quoi peut-on parler de linéarité de la propriété $(\mathscr{P})$?
Si deux $N+1$-listes vérifient $(\mathscr{P})$ alors toute combinaison linéaire de ces deux listes vérifie également $(\mathscr{P})$. On peut donc qualifier cette propriété de linéaire.

4. On pose : $a_0 = 0$ et, pour tout entier i compris au sens large entre 1 et N : $\quad a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1}\binom{N-1}{k}$.

a. Calculer a_N ; vérifier que $(a_0,\ a_1,\ ...,\ a_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.
D'après la formule du binôme de Newton, on a : $a_N = 2^{N-1}$.
Pour $i = 1$ on a : $\dfrac{i}{N}a_{i+1} + \dfrac{N-i}{N}a_{i-1} = \dfrac{1}{N}a_2 + \dfrac{N-1}{N}a_0 = \dfrac{1}{N}(1 + N - 1) = 1 = a_1$.
Pour $i \in [\![2, N-1]\!]$, on a :

$$\frac{i}{N}a_{i+1} + \frac{N-i}{N}a_{i-1} = \frac{i}{N}\sum_{k=0}^{i}\binom{N-1}{k} + \frac{N-i}{N}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{i-2}\left(\frac{i}{N} + \frac{N-i}{N}\right)\binom{N-1}{k} + \frac{i}{N}\left(\binom{N-1}{i-1} + \binom{N-1}{i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k} + \frac{i}{N}\binom{N}{i} \qquad \text{d'après la formule de Pascal}$$

$$= \sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k} + \frac{i}{N}\frac{N!}{i!(N-i)!} = \sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k} + \frac{(N-1)!}{(i-1)!(N-1-(i-1))!}$$

$$= \sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k} + \binom{N-1}{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1}\binom{N-1}{k} = a_i$$

Ainsi, $(a_0,\ a_1,\ ...,\ a_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.

b. En considérant les nombres $p_i - \dfrac{a_i}{2^{N-1}}$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$, déterminer une expression de p_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$.
Par linéarité de la propriété $(\mathscr{P})$, la liste $\left(p_i - \dfrac{a_i}{2^{N-1}}\right)_{0\leq i\leq N}$ vérifie $(\mathscr{P})$.
De plus, $p_0 - \dfrac{a_0}{2^{N-1}} = 0$ et $p_N - \dfrac{a_N}{2^{N-1}} = 1 - 1 = 0$ donc d'après ce qui précède, la suite est constante (égale à 0), d'où

$$\forall i \in [\![0, N]\!], \quad p_i = \frac{a_i}{2^{N-1}}$$

5. En se référant à la description de l'expérience aléatoire étudiée, justifier que, pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on a l'égalité : $q_i = p_{N-i}$. En déduire qu'il est quasi-certain que le mobile finisse par s'arrêter en l'un des deux points d'abscisse 0 ou N.
Le déplacement "vers la gauche" du mobile suit les mêmes règles que le déplacement "vers la droite" en remplaçant i par $N-i$. Ainsi, finir en 0 en partant de i revient à finir en N en partant de $N-i$, d'où $q_i = p_{N-i}$.
Notons F l'événement " le mobile finit en N" et $(D = i)$ l'événement "le mobile part de l'abscisse i".

La famille $(D_i)_{0\leq i\leq N}$ constitue un système complet d'événements que l'on suppose équiprobables.
La formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{(D=i)}(F)\mathbb{P}(D=i) = \sum_{i=0}^{N} p_i \times \frac{1}{N+1}$$
$$= \frac{1}{N+1}\left(0 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{N-1}{k} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{i=k+1}^{N-1} \binom{N-1}{k} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-1}{k} (N-1-k) + 1\right) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(N-1)!(N-k-1)}{k!(N-1-k)!} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(N-1)(N-2)!}{k!(N-k-2)!} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{N+1}\left(\frac{N-1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-2}{k} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{N+1}\left(\frac{(N-1)}{2^{N-1}} \times 2^{N-2} + 1\right) \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Ainsi, le mobile a une chance sur deux de finir en N, et comme pour $i \in [\![0, N]\!]$ on a $p_i = q_{N-i}$ on obtient de la même façon que le mobile a une chance sur deux de finir en 0. Finalement, il est quasi-certain que le mobile finisse par s'arrêter en l'un des deux points d'abscisse 0 ou N, la probabilité qu'il en soit autrement étant nulle.

6. On reprend dans cette question les notations de la partie I.

a. Justifier que p_1 est la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = N)$.

On admet que : $p_1 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = N)$.

$(X_n = N)$ est l'événement "le mobile est en N à l'instant n, sachant qu'il est parti de 1".
L'événement "le mobile finit en N en partant de 1" (dont la probabilité est p_1) se réalise si, et seulement s'il existe un instant $n \in \mathbb{N}$ auquel le mobile est en N, sachant qu'il est parti de la case 1, ainsi p_1 est la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = N)$.

b. Vérifier la cohérence entre les valeurs de p_1 et q_1 d'une part, et le résultat de I. 4. d) d'autre part (question dans laquelle N est égal à 3).
Si $N = 3$, on a :

$$p_1 = \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{0} \binom{2}{k} = \frac{1}{4} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)$$

$$\text{et} \quad q_1 = p_2 = \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{1} \binom{2}{k} = \frac{1}{4}(1+2) = \frac{3}{4} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$$