$\star$ Sup - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$ - - 2021-2022 -

Math. - ES 2

vendredi 17 juin 2022 - Durée 4 h

EXERCICE 1

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^3 - n}$, pour $n \geq 2$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^3 - X}$.

3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} u_n$.

EXERCICE 2

On considère la fonction F définie sur $[0, 1[$ par

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{(1-t)(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est dérivable sur $[0, 1[$ et donner l'expression de $F'(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{X^3}{(1-X)(1+X^2)}$, et en déduire l'expression de $F(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

3. Effectuer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $F(x)$.

4. Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un équivalent de $F'(x)$ au voisinage de 0.

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. a. A l'aide d'une comparaison somme - intégrale, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$$

b. En déduire un encadrement de $\dfrac{S_n}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$, puis un équivalent de S_n au voisinage de $+\infty$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

a. Montrer que la série de terme général u_n est convergente. On note γ sa somme.

b. Montrer que :

$$S_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

3. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2 S_n}$.

PROBLÈME

Dans tout le problème, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 3.

Un mobile se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, ... , N d'un axe gradué selon les règles suivantes :

– à l'instant 0, il se trouve en un des points d'abscisse 0, 1, ... , N ;

– pour tout entier i compris au sens large entre 1 et $(N-1)$, si le mobile est au point d'abscisse i à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors il se trouve à l'instant $(n+1)$ au point d'abscisse $(i+1)$ avec la probabilité $\dfrac{i}{N}$, et au point d'abscisse $(i-1)$ avec la probabilité $\dfrac{N-i}{N}$;

– si le mobile se trouve à l'origine à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste à l'origine à l'instant suivant ;

– si le mobile se trouve au point d'abscisse N à un instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste en ce point à l'instant suivant.

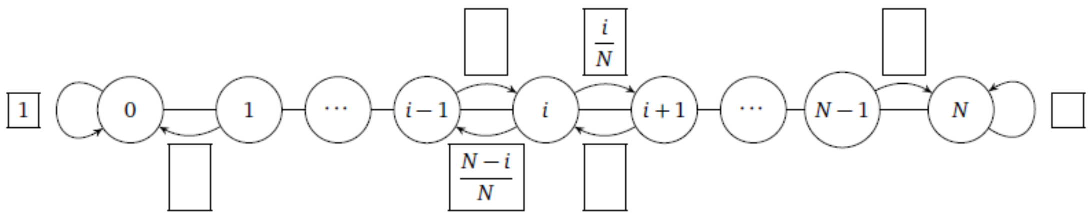
I. Étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette première partie, le mobile se trouve au point d'abscisse 1 à l'instant initial 0.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire qui donne l'abscisse du mobile à l'instant n ; de plus, on définit la matrice colonne U_n par : $$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{P}(X_n = k)$ désigne la probabilité de l'événement $(X_n = k)$.

1. Reproduire et compléter le schéma ci-dessous par les probabilités conditionnelles manquantes (au nombre de 5) indiquées par un cadre vide.



2. Déterminer la loi de probabilité de X_1 , X_2 et X_3 (on pourra remarquer que, pour X_3, il convient de distinguer les cas $N = 3$ et $N \geqslant 4$).

3. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout entier k compris au sens large entre 0 et N, exprimer chacune des probabilités $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$, ... , $\mathbb{P}(X_n = N)$. Lorsque $N \geqslant 4$, on sera amené à distinguer les cas $k = 0$, $k = 1$, $2 \leqslant k \leqslant N-2$, $k = N-1$ et $k = N$.

b. En déduire une matrice M telle que, pour tout entier naturel n, on ait : $U_{n+1} = M\,U_n$.
On précisera clairement la valeur et la position des termes non nuls de la matrice M.

4. Dans cette question 4, et elle seule, on pose $N = 3$. On admet que $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont M est la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$, et soit $\mathscr{B}$ la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,-1,-1,1)$, $u_3 = (1,-2,2,-1)$, $u_4 = (0,0,0,1)$.

a. Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}$. Expliciter alors une matrice P telle que :
$$M = PDP^{-1}$$

b. Calculer P^{-1} (le détail des calculs devra figurer sur la copie).

c. Expliciter la deuxième colonne de la matrice M^n ($n \in \mathbb{N}$).

d. Pour tout n de $\mathbb{N}$, déduire de la question précédente la loi de X_n.
Vérifier que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{3}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \dfrac{1}{4}$.

II. Étude de l'arrêt du mobile

Pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on note :
- p_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse N en partant initialement du point d'abscisse i ;
- q_i la probabilité que le mobile finisse par s'arrêter au point d'abscisse 0 en partant initialement du point d'abscisse i.

D'autre part, on dira qu'une $(N+1)$-liste $(u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N)$ de nombres réels possède la propriété $(\mathscr{P})$ si :

$$\text{pour tout entier } i \text{ compris au sens large entre 1 et } (N-1),\ u_i = \frac{i}{N}u_{i+1} + \frac{N-i}{N}u_{i-1}.$$

1. a. Préciser les valeurs de p_0, p_N, q_0 et q_N.

b. Justifier d'une phrase que la $(N+1)$-liste $(p_0,\ p_1,\ ...,\ p_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.

2. Soit $(u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N)$ une $(N+1)$-liste de nombres réels possédant la propriété $(\mathscr{P})$.

a. Exprimer $u_{i+1} - u_i$ en fonction de $u_i - u_{i-1}$ ($1 \leqslant i \leqslant N-1$).
En déduire que la suite $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ est monotone.

b. Que peut-on dire des nombres $u_0,\ u_1,\ ...,\ u_N$ si $u_0 = u_N$?

3. En quoi peut-on parler de linéarité de la propriété $(\mathscr{P})$?

4. On pose : $a_0 = 0$ et, pour tout entier i compris au sens large entre 1 et N : $\qquad a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \binom{N-1}{k}$.

a. Calculer a_N ; vérifier que $(a_0,\ a_1,\ ...,\ a_N)$ possède la propriété $(\mathscr{P})$.

b. En considérant les nombres $p_i - \dfrac{a_i}{2^{N-1}}$ ($0 \leqslant i \leqslant N$), déterminer une expression de p_i ($1 \leqslant i \leqslant N$).

5. En se référant à la description de l'expérience aléatoire étudiée, justifier que, pour tout entier i compris au sens large entre 0 et N, on a l'égalité : $q_i = p_{N-i}$. En déduire qu'il est quasi-certain que le mobile finisse par s'arrêter en l'un des deux points d'abscisse 0 ou N.

6. On reprend dans cette question les notations de la partie I.

a. Justifier que p_1 est la probabilité de l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = N)$.
On admet que : $p_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = N)$.

b. Vérifier la cohérence entre les valeurs de p_1 et q_1 d'une part, et le résultat de I. 4. d) d'autre part (question dans laquelle N est égal à 3).

Fin de l'énoncé