Math. - ES 1

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \quad (L)$$

1. Donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (L).
$S_H = \{x \mapsto A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$

2. Montrer que y est solution de (L) si et seulement si la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = \mathrm{e}^{-3x}y(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} \qquad (L_1)$$

et donc si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 4y = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} \qquad (L_2)$$

Soit $z : x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}y(x)$, où y est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par produit et pour tout réel x on a :
$z'(x) = \mathrm{e}^{-3x}(-3y(x) + y'(x)) \quad$ et $\quad z''(x) = \mathrm{e}^{-3x}(9y(x) - 6y'(x) + y''(x))$
Ainsi, z est solution de (L_1) si et seulement si pour tout réel x :
$\mathrm{e}^{-3x}(-3y(x) - 2y'(x) + y''(x)) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
ce qui équivaut à y solution de (L).

3. a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x on a :

$$\mathrm{e}^{4x}\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \mathrm{e}^{2x}\left(a\mathrm{e}^{2x} + b + \frac{c}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\right) \qquad = \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \frac{2}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\right)$$

b. Résoudre (L_2).
Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-4x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = \lambda h$ où $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-4x}$.
On obtient $\lambda'(x) = \mathrm{e}^{4x}\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \dfrac{2}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\right)$ donc $y_p(x) = \mathrm{e}^{-4x}\left(\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x} + \ln(1 + \mathrm{e}^{2x}) + C\right)$
où C est une constante réelle. Finalement, les solutions de (L_2) sont :
$S_{L_2} = \left\{C\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{1}{4} - \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-4x}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{2x}\right), C \in \mathbb{R}\right\}$

4. a. Déterminer les réels α, β et γ tels que pour tout réel $u > 0$ on a :

$$\frac{1}{u^2(1 + u)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{\gamma}{1 + u} \qquad = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{1 + u}$$

b. Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2t})}{\mathrm{e}^{4t}}\mathrm{d}t$, à l'aide du changement de variable $u=\mathrm{e}^{2t}$ et d'une intégration par parties.

Le changement de variable est de classe C^1 et strictement croissant. Le théorème de changement de variable donne :

$$\int^x \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2t})}{\mathrm{e}^{4t}}\mathrm{d}t = \int^{\mathrm{e}^{2x}} \frac{\ln(1+u)}{u^2}\times\frac{\mathrm{d}u}{2u} = \frac{1}{2}\int^{\mathrm{e}^{2x}}\frac{\ln(1+u)}{u^3}\mathrm{d}u$$

On pose $f : u \mapsto \ln(1+u)$ et $g : u \mapsto -\dfrac{1}{2u^2}$; f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le théorème d'intégration par parties donne :

$$\frac{1}{2}\int^{\mathrm{e}^{2x}}\frac{\ln(1+u)}{2u^3}\mathrm{d}u = \left[-\frac{\ln(1+u)}{4u^2}\right]^{\mathrm{e}^{2x}} + \frac{1}{4}\int^{\mathrm{e}^{2x}}\frac{1}{u^2(u+1)}\mathrm{d}u =$$

$$-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2x})}{4\mathrm{e}^{4x}}+\frac{1}{4}\int^{\mathrm{e}^{2x}}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2x})}{4\mathrm{e}^{4x}}+\frac{1}{4}\left(-2x-\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}+\ln(1+\mathrm{e}^{2x})\right)+C$$

où C est une constante réelle.

c. Résoudre (L_1).

z est solution de L_1 si et seulement z' est solution de (L_2) on en déduit donc :

$$S_{L_1} = \left\{x\mapsto C_1+C_2\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-4x}\right)\ln(1+\mathrm{e}^{2x}),(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

5. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (L).

$$S_L = \left\{x\mapsto C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{3x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\ln(1+\mathrm{e}^{2x}),(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

EXERCICE 2

1. Montrer que :

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \begin{cases} 2\mathrm{Arctan}(x) & \text{si} \quad x\in]-1,1[\\ 2\mathrm{Arctan}(x)-\pi & \text{si} \quad x\in]1,+\infty[\\ 2\mathrm{Arctan}(x)+\pi & \text{si} \quad x\in]-\infty,-1[\end{cases}$$

La fonction $f\mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Par ailleurs elle est impaire.

Pour $x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$.

On en déduit l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que $f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{Arctan}(x)+C_1 & \text{si} \quad x\in[0,1[\\ 2\mathrm{Arctan}(x)+C_2 & \text{si} \quad x\in]1,+\infty[\end{cases}$

$f(0)=0$ donne $C_1=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to 0}\mathrm{Arctan}(X)=0$ avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$ donne $C_2=-\pi$.

Le fait que f soit impaire donne le résultat attendu.

2. En déduire les solutions de l'équation :

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=\mathrm{Arcsin}(x)$$

L'équation se résout dans $]-1,1[$ compte tenu des deux domaines de définitions.

L'équation est donc équivalente à $2\mathrm{Arctan}(x)=\mathrm{Arcsin}(x)$;

$2\mathrm{Arctan}(x)=\mathrm{Arcsin}(x)\Rightarrow \sin\left(2\mathrm{Arctan}(x)\right)=x\Rightarrow 2\sin\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)\cos\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)=x$

$\Rightarrow 2\dfrac{\sin\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)}{\cos\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)}\cos^2\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)=x\Rightarrow\dfrac{2\tan\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)}{1+\tan\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)^2}=x\Rightarrow\dfrac{2x}{1+x^2}=x$

$\Rightarrow x\in\{0,-1,1\}$

Compte tenu du domaine de validité, la seule solution possible est $x=0$.

Comme $\mathrm{Arctan}(0)=\mathrm{Arcsin}(0)=0$, on en déduit que 0 est la seule solution de l'équation.

EXERCICE 3

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

1. a. Déterminer les fonctions constantes appartenant à E.

$C=\dfrac{2C}{1+C^2}\Leftrightarrow C\in\{0,-1,1\}$; les fonctions constantes de E sont donc $x\mapsto 0,\quad x\mapsto -1,\quad x\mapsto 1.$

b. La fonction f appartenant à E, montrer que s'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=\pm 1$, alors f est constante.

S'il existe $a\in\mathbb{R}$, tel que $f(a)=\pm1$ alors, pour tout réel x on a :

$f(x+a)=\dfrac{\pm1+f(x)}{1\pm f(x)}=\pm1$ donc f est constante, égale à ±1.

2. On suppose désormais qu'il existe dans E une fonction f non constante.

a. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

$f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$; comme f n'est pas constante, $f(0)\neq\pm1$ donc $f(0)=0$.

Pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x-x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}=0$; on en déduit que $f(x)+f(-x)=0$ donc que f est impaire.

b. En écrivant $x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}$, montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\in]-1,1[$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$.

Or pour tout réel a, $(1-|a|)^2\geq 0\Rightarrow 1+a^2\geq 2|a|\Rightarrow \dfrac{2|a|}{1+a^2}\leq 1$.

On en déduit que $|f(x)|\leq 1$ donc que $f(x)\in[-1,1]$. Comme de plus f n'est pas constante, elle ne peut pas prendre les valeurs ±1 d'où $f(x)\in]-1,1[$.

3. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note H_n l'assertion : "$\forall x\in\mathbb{R},\quad \dfrac{1+f(nx)}{1-f(nx)}=\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$"

H_0 est vérifiée. Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose H_n vérifiée. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^{n+1}=\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)}\times\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=\frac{1+f(x)+f(nx)+f(x)f(nx)}{1-f(x)-f(nx)+f(nx)f(x)}=$$
$$\frac{1+f(x+nx)(1+f(x)f(nx))+f(x)f(nx)}{1-f(x+nx)\,(1+f(x)f(nx))+f(x)f(nx)}=\frac{(1+f(x)f(nx))(1+f((n+1)x))}{(1+f(x)f(nx))(1-f((n+1)x))}=\frac{1+f((n+1)x)}{1-f((n+1)x)}$$

Ainsi, H_{n+1} est vérifiée.

Par principe de récurrence H_n est donc vraie pour tout entier n.

b. On pose $b=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$. Exprimer $f(n)$ en fonction de b et de n, pour $n\in\mathbb{N}$.

Remarquons tout d'abord que d'après la question **2.b**, $f(1)\in]-1,1[$, donc $b>0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}=b^n$; $b^n\neq-1$, donc $f(n)=\dfrac{b^n-1}{b^n+1}$.

c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{b^{\frac{1}{n}} + 1}$$

D'après la question **3.a**, avec $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient : $\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)} = \left(\dfrac{1+f\left(\frac{1}{n}\right)}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n$, d'où le résultat.

4. On suppose que f est dérivable en 0 et on pose $f'(0) = k$.

a. En utilisant le taux d'accroissement de f en 0, montrer que $k = \dfrac{\ln(b)}{2}$.

On a : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = k$; en particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = k$.

Par ailleurs, $nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)}{b^{\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}-1\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}-1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{h\ln(b)}-1}{h} \underbrace{=}_{x\,=\,h\ln(b)} \ln(b) \times \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \ln(b)$,

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(b)}+1\right) = 2$, on en déduit que $k = \dfrac{\ln(b)}{2}$.

b. En utilisant le taux d'accroissement de f en x, montrer que f est dérivable en x et que

$$f'(x) = k\left(1 - (f(x))^2\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \neq 0,\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)} - f(x)}{h} = \dfrac{f(h)\left(1-(f(x))^2\right)}{h(1+f(x)f(h))}$.
Comme f est dérivable en 0, elle y est continue et $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$; de plus,
$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = f'(0) = k$ on a donc f dérivable en x et $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\left(1-(f(x))^2\right)$.

5. a. Déterminer les réels α et β tels que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} \quad = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

b. Déduire de ce qui précède l'ensemble des éléments de E dérivables en 0.

On a pour tout réel x : $\dfrac{f'(x)}{1-(f(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{2}f'(x)}{1-f(x)} + \dfrac{\frac{1}{2}f'(x)}{1+f(x)} = k$.
On a montré que pour tout réel $x, f(x) \in]-1,1[$, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $-\dfrac{1}{2}\ln(1-f(x)) + \dfrac{1}{2}\ln(1+f(x)) = kx + C$.

Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $C = 0$ puis que $\ln\sqrt{\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} = kx$ et par suite que

$f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}$.
Réciproquement, f ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est bien dérivable en 0, et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
$\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1} + \frac{\mathrm{e}^{2ky}-1}{\mathrm{e}^{2ky}+1}}{1+\frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}\frac{\mathrm{e}^{2ky}-1}{\mathrm{e}^{2ky}+1}} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{2kx}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2ky}+1\right)+\left(\mathrm{e}^{2ky}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2kx}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2kx}+1\right)\left(\mathrm{e}^{2ky}+1\right)+\left(\mathrm{e}^{2kx}-1\right)\left(\mathrm{e}^{2ky}-1\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{2k(x+y)}-1}{\mathrm{e}^{2k(x+y)}+1} =$
$f(x+y)$
Ainsi, une telle fonction est bien dans E.

EXERCICE 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1. Montrer que
$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$$

$\omega \neq 1$ donc $1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{n-1} = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ puisque $\omega^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ω).

2. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

On peut écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k\right) = 0.$

On a donc bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0}$.

3. Montrer que
$$\omega^k - 1 = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}$$

$\omega^k - 1 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k\pi}{n}}\right) = \boxed{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}$. (Formule d'Euler)

4. A l'aide des questions précédentes, démontrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = 2n$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 4\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2$, car $|\mathrm{i}| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right| = 1$.

De plus, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, ce qui donne :

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 - 2\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 2n}$. (D'après **3**)

EXERCICE 5

Soient n un entier naturel non nul et a un réel de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On souhaite résoudre l'équation
$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^n = \frac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a} \qquad (1)$$

1. Déterminer la forme exponentielle de
$$\frac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a}$$

On a : $\quad \dfrac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a} = \dfrac{1+\mathrm{i}\frac{\sin a}{\cos a}}{1-\mathrm{i}\frac{\sin a}{\cos a}} = \dfrac{\cos a + \mathrm{i}\sin a}{\cos a - \mathrm{i}\sin a} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \boxed{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$$

On a $\quad Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a} \Longrightarrow |Z^n| = |Z|^n = 1$ donc $|Z| = 1$.
En notant $Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on obtient : $\quad Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a} \Longrightarrow n\theta \equiv 2a\ [2\pi]$, $\quad$ car $\arg(Z^n) \equiv n \times \arg(Z)\ [2\pi]$.
Ainsi, les solutions de $Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$ sont de la forme $Z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2a+2k\pi}{n}}$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
réciproquement, ces nombres sont bien solutions de l'équation $Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$. De plus, les arguments étant définis à 2π-près, les solutions de $Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$ sont $\boxed{Z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{a+k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k},\ k \in [\![0, n-1]\!]}$.

3. Démontrer que

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{i}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

On a : $\forall \theta \in]-\pi, \pi[$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\theta}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$ et

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$. (Formules d'Euler)

Ainsi, $\boxed{\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{i}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1)} = \frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}}{\mathrm{i} \times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}} = \tan\frac{\theta}{2}}$.

4. Résoudre l'équation (1). On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tangente.
D'après **1**, $\quad z$ est solution de (1) si, et seulement si $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ est défini et est solution de $Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$, ce qui équivaut à $z \neq -\mathrm{i}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ est solution de $Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$.
De plus, $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ est solution de (1) $\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\quad \dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = Z_k$ (d'après 2)
$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\quad \mathrm{i}z(Z_k + 1) = Z_k - 1$.
On a : $Z_k = -1 \Longleftrightarrow \theta_k \equiv \pi[2\pi] \Longleftrightarrow 2\dfrac{a+k\pi}{n} \equiv \pi[2\pi]$; or $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $0 \leq 2\dfrac{a+k\pi}{n} < \pi$ d'où $Z_k \neq -1$. On a donc :
$\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ est solution de (1) $\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\quad z = \dfrac{Z_k - 1}{\mathrm{i}(Z_k + 1)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} - 1}{\mathrm{i}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k} + 1)}$.
Enfin, comme $\theta_k \not\equiv \pi[2\pi]$, on peut appliquer le **3** pour conclure que :

$$z \text{ est solution de (1)} \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = \tan\frac{\theta_k}{2}.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de (1) sont } \left\{\tan\left(\frac{a+k\pi}{n}\right), \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}.$$

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^x$$

1. a. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, 1]$ et montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
f est dérivable (donc continue) sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], \ f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^x$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	$4\mathrm{e}$
f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}$

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0,1] \text{ sur } [0,2\mathrm{e}]}$.

On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

b. Vérifier qu'il existe dans $[0,1]$ un et un seul réel noté α tel que

$$\alpha \mathrm{e}^{\alpha} = 1$$

Montrer que $\alpha \neq 0$.

$2 \in [0, 2\mathrm{e}]$, donc la question précédente permet d'écrire

$$\exists! \alpha \in [0,1], \ f(\alpha) = 2$$

c'est à dire $\boxed{\exists! \alpha \in [0,1], \ \alpha \mathrm{e}^{\alpha} = 1}$

De plus, $f(0) = 0$ implique, toujours par la question précédente, que $\alpha \neq 0$.

c. Résoudre, pour $x \in [0,1]$:

$$f(x) = x$$

Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{x} = x \\ &\iff (2\mathrm{e}^{x} - 1)x = 0 \\ &\iff x = 0 \quad (\text{ car } -\ln(2) \notin [0,1]) \end{aligned}$$

d. Résoudre, pour $x \in [0,1]$:

$$f(x) \geq x$$

Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq x &\iff 2x\mathrm{e}^{x} \geq x \\ &\iff (2\mathrm{e}^{x} - 1)x \geq 0 \\ &\iff x \in [0,1] \quad (\text{ car sur } [0,1], \quad 2\mathrm{e}^{x} - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x \geq 0\,) \end{aligned}$$

e. Justifier que

$$f^{-1}(\,[0,1]\,) \subset [0,1]$$

f^{-1} est strictement croissante sur $[0,1]$ donc

$\boxed{f^{-1}([0,1]) \subset f^{-1}([0,2\mathrm{e}]) = \left[f^{-1}(0), f^{-1}(2\mathrm{e})\right] = [0,1]}$

2. On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [0,1]$$

A l'aide de 1.*e*., comme $u_0 = \alpha \in [0,1]$, une récurrence immédiate donne $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}$, ce qui justifie par là-même que (u_n) est bien définie.

b. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
La question 1.*d*., nous donne

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq x$$

En composant par f^{-1}, qui est strictement croissante sur $[0,1]$, on a l'équivalence

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq x \Longleftrightarrow \forall x \in [0,1],\ x \geq f^{-1}(x)$$

$[0,1]$ est stable par f^{-1}, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ f^{-1}(x) - x \leq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante}}$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.
(u_n) est décroissante (d'après 2.*b*.) et minorée (car bornée d'après 2.*a*.) donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers l. f^{-1} étant continue sur $[0,1]$, l vérifie $l \in [0,1]$, et $f^{-1}(l) = l$ soit encore $f(l) = l$. La question 1.*c*. permet de conclure que $\boxed{\lim u_n = 0}$

3. On se propose de préciser ce résultat en montrant que $(2^n u_n)$ a une limite finie non nulle.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \mathrm{e}^{-u_{n+1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = f^{-1}(u_n) &\Longleftrightarrow u_n = f(u_{n+1}) \\ &\Longleftrightarrow u_n = 2u_{n+1}\mathrm{e}^{u_{n+1}} \\ &\Longleftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \mathrm{e}^{-u_{n+1}} \end{aligned}$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{-S_n}}{2^n}$$

On peut le démontrer par récurrence. On peut aussi écrire, puisque $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k \mathrm{e}^{-u_{k+1}} &\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u_{k+1}} \\ &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u_{k+1}} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_n}{u_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-u_{k+1}} \qquad (\text{ par télescopage }) \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 \mathrm{e}^{-S_n + u_0} \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-S_n} \qquad (\text{car} \quad u_0 \mathrm{e}^{u_0} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha} = 1) \end{aligned}$$

On vérifie que cette égalité reste vraie pour $n = 0$.

c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
et en déduire une majoration de S_n.

On sait que $\forall k \in \mathbb{N},\ S_k \geq 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^{-S_k} \leq 1$; ce qui implique que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \frac{\mathrm{e}^{-S_k}}{2^k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$

On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2}$

d. En déduire que la suite (S_n) est convergente. En notant L sa limite, montrer que
$$\alpha \leq L \leq 2$$

$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$ donc (S_n) est croissante. De plus, d'après **3.c**, (S_n) est majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(S_n) \text{ est convergente}}$.
En notant, L sa limite, comme pour $n \in \mathbb{N}, S_0 \leq S_n \leq 2$ (d'après **3.c**), par passage à la limite, on obtient $S_0 \leq L \leq 2$, ce qui signifie que $\boxed{\alpha \leq L \leq 2}$.

e. Déterminer la limite de $(2^n u_n)$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n u_n = \mathrm{e}^{-S_n}$ donc par composition des limites $\boxed{\lim 2^n u_n = \mathrm{e}^{-L}}$

REMARQUE : On retrouve alors que
$$\lim u_n = 0$$
mais en ayant une information supplémentaire : (u_n) converge vers 0 "à la vitesse" d'une suite géométrique (voir chapitre sur l'analyse asymptotique).