$\star$ Sup - St Joseph/ICAM Toulouse $\star$ - - 2021-2022 -

Math. - ES 1

lundi 10 janvier 2022 - Durée 4 h

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \qquad (L)$$

1. Donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (L).

2. Montrer que y est solution de (L) si et seulement si la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = \mathrm{e}^{-3x}y(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} \qquad (L_1)$$

et donc si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 4y = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} \qquad (L_2)$$

3. a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x on a :

$$\mathrm{e}^{4x}\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \mathrm{e}^{2x}\left(a\mathrm{e}^{2x} + b + \frac{c}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\right)$$

b. Résoudre (L_2).

4. a. Déterminer les réels α, β et γ tels que pour tout réel $u > 0$ on a :

$$\frac{1}{u^2(1+u)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u^2} + \frac{\gamma}{1+u}$$

b. Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\ln(1 + \mathrm{e}^{2t})}{\mathrm{e}^{4t}}\mathrm{d}t$, à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^{2t}$ et d'une intégration par parties.

c. Résoudre (L_1).

5. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (L).

EXERCICE 2

1. Montrer que :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ 2\operatorname{Arctan}(x)-\pi & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\\ 2\operatorname{Arctan}(x)+\pi & \text{si} \quad x \in]-\infty,-1[\end{cases}$$

2. En déduire les solutions de l'équation :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)$$

EXERCICE 3

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$$

1. a. Déterminer les fonctions constantes appartenant à E.

b. La fonction f appartenant à E, montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \pm 1$, alors f est constante.

2. On suppose désormais qu'il existe dans E une fonction f non constante.

a. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

b. En écrivant $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in]-1,1[$$

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$$

b. On pose $b = \dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$. Exprimer $f(n)$ en fonction de b et de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{b^{\frac{1}{n}}+1}$$

4. On suppose que f est dérivable en 0 et on pose $f'(0) = k$.

a. En utilisant le taux d'accroissement de f en 0, montrer que $k = \dfrac{\ln(b)}{2}$.

b. En utilisant le taux d'accroissement de f en x, montrer que f est dérivable en x et que

$$f'(x) = k\left(1-(f(x))^2\right)$$

5. a. Déterminer les réels α et β tels que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

b. Déduire de ce qui précède l'ensemble des éléments de E dérivables en 0.

EXERCICE 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1. Montrer que

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

3. Montrer que

$$\omega^k - 1 = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}$$

4. A l'aide des questions précédentes, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2 = 2n$$

EXERCICE 5

Soient n un entier naturel non nul et a un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On souhaite résoudre l'équation

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)^n = \frac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a} \qquad (1)$$

1. Déterminer la forme exponentielle de

$$\frac{1+\mathrm{i}\tan a}{1-\mathrm{i}\tan a}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$,

$$Z^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}a}$$

3. Démontrer que

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1\right)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

4. Résoudre l'équation (1). On exprimera les solutions à l'aide de la fonction tangente.

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^x$$

1. a. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, 1]$ et montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
On note f^{-1} la bijection réciproque de f.

b. Vérifier qu'il existe dans $[0, 1]$ un et un seul réel noté α tel que

$$\alpha\mathrm{e}^\alpha = 1$$

Montrer que $\alpha \neq 0$.

c. Résoudre, pour $x \in [0,1]$:

$$f(x) = x$$

d. Résoudre, pour $x \in [0,1]$:

$$f(x) \geq x$$

e. Justifier que

$$f^{-1}\,(\,[0,1]\,) \subset [0,1]$$

2. On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [0,1]$$

b. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

3. On se propose de préciser ce résultat en montrant que $(2^n u_n)$ a une limite finie non nulle.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \mathrm{e}^{-u_{n+1}}$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{-S_n}}{2^n}$$

c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

et en déduire une majoration de S_n.

d. En déduire que la suite (S_n) est convergente. En notant L sa limite, montrer que

$$\alpha \leq L \leq 2$$

e. Déterminer la limite de $(2^n u_n)$.

Fin de l'énoncé