
DEVOIR MAISON 9 - ETUDE DE SUITES

Soient a et b des réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = a_n M + b_n I_2$$

b. Déterminer a_n et b_n .

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = au_n + (1-a)v_n \\ v_{n+1} = (1-b)u_n + bv_n \end{cases}$$

a. Donner la forme explicite de u_n et v_n .

b. Étudier la convergence de (u_n) et (v_n) .