Devoir maison 9 - Etude de suites

Soient a et b des réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n : \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, M^n = a_n M + b_n \mathrm{I}_2$.
P_0 est vérifiée car $M^0 = 0 \times M + 1 \times \mathrm{I}_2$;
P_1 est vérifiée car $M^1 = 1 \times M + 0 \times \mathrm{I}_2$;
P_2 est vérifiée car $M^2 = (a+b) \times M + (1-a-b) \times \mathrm{I}_2$.
Soit $n \geq 2$; on suppose que P_n est vérifiée. On a :
$M^{n+1} = M^n \times M = (a_n M + b_n \mathrm{I}_2) M = a_n M^2 + b_n M = a_n \left((a+b)M + (1-a-b)\mathrm{I}_2\right) + b_n M = \left(a_n(a+b) + b_n\right) M + a_n(1-a-b)\mathrm{Id}_2$.
En notant $a_{n+1} = a_n(a+b) + b_n$ et $b_{n+1} = a_n(1-a-b)$ on a P_{n+1} vérifiée.
Par principe de récurrence P_n est vérifiée pour tout n.

b. Déterminer a_n et b_n.
D'après le résultat précédent, (a_n) et (b_n) sont définies par :

$$a_0 = 0, b_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = a_n(a+b) + b_n \\ b_{n+1} = a_n(1-a-b) \end{cases}$$

On a donc $a_0 = 0, a_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = (a+b)a_{n+1} + (1-a-b)a_n$.
La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :
$r^2 - (a+b)r + (a+b-1) = 0$.
Le discriminant est $\Delta = (a+b)^2 - 4(a+b-1) = (a+b)^2 - 4(a+b) + 4 = (a+b-2)^2$.
Les solutions de l'équation caractéristique sont 1 et $a+b-1$.
L'hypothèse $0 \leq a < b \leq 1$ assure que les deux solutions sont distinctes.
A l'aide des premiers termes, on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left(1 - (a+b-1)^n\right)$ et par suite $b_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left((a+b-1)^n - (a+b-1)\right)$.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = a u_n + (1-a) v_n \\ v_{n+1} = (1-b) u_n + b v_n \end{cases}$$

a. Donner la forme explicite de u_n et v_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$; on a donc $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M U_n$.
Une récurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0$.
D'après la question **1.**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$M^n = \dfrac{1}{2-a-b}\left(\left(1-(a+b-1)^n\right)\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix} + \left((a+b-1)^n - (a+b-1)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$
$\dfrac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} (a+b-1)^n(1-a) + 1 - b & \left(1-(a+b-1)^n\right)(1-a) \\ \left(1-(a+b-1)^n\right)(1-b) & (a+b-1)^n(1-b) + 1 - a \end{pmatrix}$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left((a+b-1)^n(1-a)(u_0 - v_0) + (1-b)u_0 + (1-a)v_0\right) \\ v_n = \dfrac{1}{2-a-b}\left((a+b-1)^n(1-b)(v_0 - u_0) + (1-b)u_0 + (1-a)v_0\right) \end{cases}$

b. Étudier la convergence de (u_n) et (v_n).
$0 \leq a < b \leq 1$ donc $-1 < a + b - 1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a+b-1)^n = 0$ et par suite,
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{(1-b)u_0 + (1-a)v_0}{2-a-b}$.