Devoir maison 8 - Fonctions convexes

Rappel : Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **convexe** si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

f est dite **concave** si $-f$ est convexe.

1. Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si la partie $Epif$ du plan située au-dessus de $\mathscr{C}$ (appelée **épigraphe de** f) est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (A,B) \in Epif, \quad [AB] \subset Epif$$

(ce qui équivaut à dire que tout arc de $\mathscr{C}$ est sous sa corde.)

2. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur tout intervalle de $I \setminus \{a\}$.

3. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

a. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si f' est croissante sur I.

b. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si $\mathscr{C}$ est située au-dessus de toutes ses tangentes.

4. Étudier la convexité des fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \mapsto \ln(x)$ et $h : x \mapsto x^3$.

5. En utilisant la convexité, montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$$

6. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et n un entier supérieur à 2.
Montrer que pour $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de Jensen**.

7. Comparaison de moyennes :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On note :

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i, \quad G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, \quad \text{et} \quad H \text{ tel que } \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

Montrer que

$$H \leq G \leq A$$

A s'appelle **moyenne arithmétique**, G **moyenne géométrique** et H **moyenne harmonique** de la famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$.