Devoir maison 8 - Fonctions convexes

Rappel : Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **convexe** si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

f est dite **concave** si $-f$ est convexe.

1. Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si la partie $Epif$ du plan située au-dessus de $\mathscr{C}$ (appelée **épigraphe de** f) est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (A,B) \in Epif, \quad [AB] \subset Epif$$

(ce qui équivaut à dire que tout arc de $\mathscr{C}$ est sous sa corde.)

$\Rightarrow$ Supposons f convexe.
Soient $A(x,y)$ et $B(x',y')$ des points de $Epif$, avec $x < x', y \geq f(x)$ et $y' \geq f(x')$.
f est convexe donc $\forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \leq \lambda y + (1-\lambda) y'$.
Ainsi $M(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y') \in Epif$, c'est-à-dire que l'ensemble des points du segment $[AB]$ est dans $Epif$.
$\Leftarrow$ Supposons $Epif$ convexe.
Soient $A(x, f(x))$ et $B(x', f(x'))$ des points de $\mathscr{C}$. Ils sont également des points de $Epif$ donc pour $\lambda \in [0,1]$ le point $M(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')) \in [AB]$ est situé dans $Epif$ donc $f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$.
On en déduit que f est convexe.

2. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur tout intervalle de $I \setminus \{a\}$.

$\Rightarrow$ Soit $(a,b,c) \in I^3$. Si $a < b \leq c$, on note $\lambda = \dfrac{b-a}{c-a} \in [0,1]$; on a $b = (1-\lambda)a + \lambda c$ donc, f étant convexe, on a :

$f(b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(c) \Leftrightarrow (f(b) - f(a)) \leq \lambda (f(c) - f(a)) \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

Si on a $b \leq c < a$, on prend $\lambda = \dfrac{a-c}{a-b}$ et on obtient le même résultat.

$\Leftarrow$ Soit $(a,b) \in I^2, \lambda \in [0,1]$. Sans perte de généralités, on suppose $a < b$ et $\lambda \neq 1$.
Comme $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante alors en notant $c = \lambda a + (1-\lambda) b$, on a $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ce qui donne $f(c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.
f est donc convexe (le cas $\lambda = 1$ étant trivial).

3. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

a. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si f' est croissante sur I.

$\Rightarrow$ Si f est convexe, soient $a < x < b$. D'après la question précédente, les fonctions $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $x \mapsto \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$ sont croissantes, on a donc : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$.
f étant dérivable, par passage à la limite, on obtient : $f'(a) \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$.

$\Leftarrow$ On suppose f' croissante. Soit g définie sur $I \setminus \{a\}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

g est dérivable sur son domaine car f est dérivable sur I et on a : $g'(x) = \dfrac{f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x-a}$.

On suppose $a < x$ (la démonstration est identique si $x < a$).

Le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]a, x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$

donc $g'(x) = \dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-a}$; par croissance de f', $g'(x) \geq 0$ et g est croissante.

b. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si $\mathscr{C}$ est située au-dessus de toutes ses tangentes.

$\Rightarrow$ On suppose f est convexe. Soient $a < a+h < x$. On a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Par passage à la limite, on obtient $f'(a) \leq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ donc $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.

Soient $x < a+h < a$. On a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Par passage à la limite, on obtient $f'(a) \geq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ donc $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.

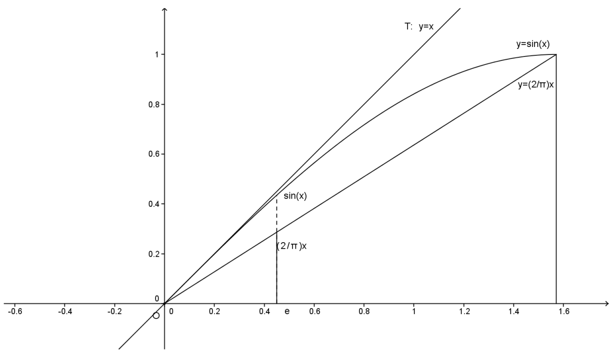
$\Leftarrow$ On suppose que $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.
Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. On a :
$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b-a)$ donc $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq f'(a)$
et $f(a) \geq f(b) + f'(b)(a-b)$ donc $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq f'(b)$.
Finalement on a $f'(a) \leq f'(b)$ donc f est croissante, donc d'après le **a.** f est convexe.

4. Étudier la convexité des fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \mapsto \ln(x)$ et $h : x \mapsto x^3$.
f est convexe, g est concave et h est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$.

5. En utilisant la convexité, montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

La fonction sin est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a donc $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x$ car la courbe est au-dessus de sa corde et $\sin x \leq x$ car la tangente en O est au-dessus de la courbe.



6. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et n un entier supérieur à 2.

Montrer que pour $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de Jensen**.

Soient f une fonction convexe, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On note P_n l'assertion :

$\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

On vérifie P_2 en prenant $\lambda = \lambda_1$ et $1-\lambda = \lambda_2$ dans la définition de la convexité.

Soit $n \geq 2$. On suppose P_n vérifiée. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n+1} \in I^{n+1}$ et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n+1} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. On note $\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $y_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i$. Alors on a :

$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_0 y_0 + (1-\lambda_0)x_{n+1}\right) \leq \lambda_0 f(y_0) + (1-\lambda_0) f(x_{n+1})$.

D'après l'hypothèse de récurrence, comme $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} f(x_i)$.

Finalement $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$ donc P_{n+1} est vérifiée.

Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 2$.

7. Comparaison de moyennes :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On note :

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, \quad \text{et} \quad H \text{ tel que } \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Montrer que

$$H \leq G \leq A$$

A s'appelle **moyenne arithmétique**, G **moyenne géométrique** et H **moyenne harmonique** de la famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$.

La fonction ln est concave. Avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = \frac{1}{n}$; on a :

$\ln(G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right)$ donc $G \leq A$.

De plus, $\ln\left(\frac{1}{G}\right) = -\ln(G) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{a_i}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{na_i}\right)$ donc $\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H}$.