Devoir maison 7 - Etude de la fonction exponentielle

PRÉSENTATION

L'objectif du devoir est de démontrer que les fonctions dérivables solutions de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (EF)$$

sont les solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \qquad (ED)$$

puis de démontrer l'existence d'une fonction solution, pour $k = 1$.
Le principe de démonstration repose sur la fabrication, pour tout réel x, de deux suites adjacentes $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ dont la limite commune définit l'image de x par une fonction vérifiant l'équation différentielle.

PARTIE I

Dans cette partie, on s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (EF).

1. Soit f une telle fonction. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction φ_a sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = f(x+a) - f(x)f(a)$.

a. Justifier la dérivabilité de φ_a sur $\mathbb{R}$, puis exprimer sa dérivée à l'aide de celle de f.

b. En déduire que toute fonction f vérifiant (EF) vérifie :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad f'(a) = kf(a)$$

c. On suppose que f n'est pas la fonction nulle ; que vaut $f(0)$?

2. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (ED).

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$ et par suite que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_a par $\psi_a(x) = f(x+a)f(-x)$.
Après avoir examiné la dérivée de ψ_a, montrer que f vérifie (EF).

PARTIE II

1. Construction de $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$.
En appliquant la méthode d'Euler, montrer par récurrence que pour tout réel a, tout réel h " suffisamment petit" et tout entier naturel n, on a :

$$f(a+nh) \approx f(a)(1+h)^n \quad (*)$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n > |x|$.
Avec $a = 0$ et $h = \dfrac{x}{n}$, $(*)$ donne $f(x) \approx f(0)\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. On note $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$
Avec $a = x$ et $h = -\dfrac{x}{n}$, $(*)$ donne $f(0) \approx f(x)\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$. On note $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

2. Étude des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont définies comme au **1.**, pour $n > |x|$.

a. Montrer que $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$.

b. Montrer que $(u_n(x))$ est croissante.

c. Vérifier que $\dfrac{1}{v_n(x)} = u_n(-x)$; en déduire le sens de variation de $(v_n(x))$.

d. Montrer que $\forall n > |x|$, on a : $1 \geq \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \geq 1 - \dfrac{x^2}{n}$; en déduire que $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$.

e. Déduire des questions précédentes que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes.

Les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ étant adjacentes, elles ont la même limite.

On note exp la fonction qui à x fait correspondre cette limite.

3. Étude de la fonction exp

a. Vérifier que $\exp(0) = 1$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 > |x|$ et $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$ on a :

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{1+\frac{x}{n}}\right)$$

c. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$,

$$\exp(x) \times h \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \exp(x) \times \frac{h}{1-h}$$

d. Démontrer que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie (ED).