Devoir maison 7 - Etude de la fonction exponentielle

PRÉSENTATION

L'objectif du devoir est de démontrer que les fonctions dérivables solutions de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (EF)$$

sont les solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \qquad (ED)$$

puis de démontrer l'existence d'une fonction solution, pour $k = 1$.
Le principe de démonstration repose sur la fabrication, pour tout réel x, de deux suites adjacentes $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ dont la limite commune définit l'image de x par une fonction vérifiant l'équation différentielle.

PARTIE I

Dans cette partie, on s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (EF).

1. Soit f une telle fonction. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction φ_a sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = f(x+a) - f(x)f(a)$.

a. Justifier la dérivabilité de φ_a sur $\mathbb{R}$, puis exprimer sa dérivée à l'aide de celle de f.
φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est et pour tout réel x on a :
$\varphi_a'(x) = f'(x+a) - f'(x)f(a)$.

b. En déduire que toute fonction f vérifiant (EF) vérifie :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad f'(a) = kf(a)$$

f vérifiant (EF), la fonction φ_a est identiquement nulle donc sa dérivée également.
En particulier, pour $x = 0$, on obtient : $f'(a) = f'(0)f(a)$ pour tout réel a.

c. On suppose que f n'est pas la fonction nulle ; que vaut $f(0)$?
f vérifiant (ED), on a $f(0) = f(0)^2$, donc soit $f(0) = 0$, soit $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x, on a : $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$, ce qui est exclu car f n'est pas nulle.
On a donc $f(0) = 1$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On suppose qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (ED).

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1$ et par suite que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est, et pour tout réel x on a : $g'(x) = f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x) = kf(x)f(-x) - kf(-x)f(x) = 0$.
Ainsi, g est constante et pour tout réel $x, g(x) = g(0) = f(0)^2 = 1$, c'est-à-dire $f(x)f(-x) = 1$.

S'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$ on aurait $f(a)f(-a) = 0 \neq 1$. On en déduit que f ne s'annule pas.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_a par $\psi_a(x) = f(x+a)f(-x)$.
Après avoir examiné la dérivée de ψ_a, montrer que f vérifie (EF).
ψ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est et pour tout réel x on a :
$\psi_a'(x) = f'(x+a)f(-x) - f(x+a)f'(-x) = kf(x+a)f(-x) - kf(x+a)f(-x) = 0$. La fonction ψ_a est donc constante et pour tout réel x on a : $\psi_a(x) = \psi_a(0) = f(a)$.
On a donc pour tous les réels x et a : $f(a+x)f(-x) = f(a)$, donc en multipliant par $f(x)$:
$f(x+a) = f(x)f(a)$.

PARTIE II

1. Construction de $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$.
En appliquant la méthode d'Euler, montrer par récurrence que pour tout réel a, tout réel h " suffisamment petit" et tout entier naturel n, on a :

$$f(a+nh) \approx f(a)(1+h)^n \quad (*)$$

f étant dérivable, on a pour tout réel x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.
Comme $f' = f$, on a $f(x+h) \approx f(x)(1+h)$ pour h suffisamment petit. On note (App) cette expression.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n : $f(a+nh) \approx f(a)(1+h)^n$.
Pour $n = 0$: $f(a+0) = f(a)(1+h)^0$ donc P_0 est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que P_n est vérifiée.
On a : $f(a+(n+1)h) = f((a+nh)+h) \approx f(a+nh)(1+h)$ d'après (App) appliquée à $x = a+nh$.
Par hypothèse, on a donc $f(a+(n+1)h) \approx f(a)(1+h)^{n+1}$; la propriété P_{n+1} est donc vérifiée.
Par principe de récurrence, la propriété P_n est vérifiée pour tout entier n.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n > |x|$.
Avec $a = 0$ et $h = \dfrac{x}{n}$, $(*)$ donne $f(x) \approx f(0)\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. On note $u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
Avec $a = x$ et $h = -\dfrac{x}{n}$, $(*)$ donne $f(0) \approx f(x)\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$. On note $v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

2. Étude des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont définies comme au **1.**, pour $n > |x|$.

a. Montrer que $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+x)^n \geq 1+nx$.
Soit $x \geq 1-1$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
$(1+x)^1 \geq 1+1\times x$ donc H_1 est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose que H_n est vérifiée.
On a : $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ par hypothèse et car $x \geq -1$.
On a donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ donc H_{n+1} est vérifiée.
Par principe de récurrence, H_n est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans la suite, on note P cette propriété.

b. Montrer que $(u_n(x))$ est croissante.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |x|$. On a :
$u_{n+1}(x) = \left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{x}{n}-\dfrac{x}{n}+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$
$= \left(1+\dfrac{x}{n}-\dfrac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\dfrac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1}.$

On veut appliquer P au second facteur. Pour cela, il faut vérifier que $\dfrac{x}{n(n+1)\left(1+\frac{x}{n}\right)} \leq 1$:
$n > |x|$ donc $1+\dfrac{x}{n} > 0$ donc il faut montrer que $x \leq n(n+1)\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ ce qui équivaut à $-x \leq n+1$ qui est vrai puisque $n > |x|$. Donc, en remarquant encore que $1+\dfrac{x}{n} > 0$:
$u_{n+1}(x) \geq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\dfrac{x}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{x}{n}-\dfrac{x}{n}\right) = u_n(x)$.
On a donc $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$ donc la suite $(u_n(x))$ est croissante.

c. Vérifier que $\dfrac{1}{v_n(x)} = u_n(-x)$; en déduire le sens de variation de $(v_n(x))$.
On a : $\dfrac{1}{v_n(x)} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}} = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = u_n(-x)$.
Ce qui précède est valable pour tout réel x donc $(u_n(-x))$ est croissante et la suite $\left(\dfrac{1}{v_n(x)}\right)$ également.
On a donc, pour $n > |x|$, $\dfrac{1}{v_{n+1}(x)} \geq \dfrac{1}{v_n(x)}$; comme la suite $(v_n(x))$ est strictement positive (car $n > |x|$), on en déduit que $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$ et par suite que $(v_n(x))$ est décroissante.

d. Montrer que $\forall n > |x|$, on a : $1 \geq \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \geq 1-\dfrac{x^2}{n}$; en déduire que $0 \leq v_n(x)-u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$.
On a : $\dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = \left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n$.
Comme $n > |x|$, on a $-\dfrac{x^2}{n^2} \geq -1$; en utilisant P, on obtient : $1 \geq \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \geq 1-\dfrac{x^2}{n}$.
Comme $v_n(x) \geq 0$, on en déduit que $u_n(x) \leq v_n(x)$ et $0 \leq v_n(x)-u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$.

e. Déduire des questions précédentes que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes.
La suite $(v_n(x))$ étant décroissante, elle est majorée par son premier terme v_{n_0} (avec $n_0 = \lfloor x \rfloor + 1$), on a donc $0 \leq v_n(x) - u_(x) \leq v_{n_0}\dfrac{x^2}{n}$. Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n(x)-u_n(x)) = 0$.
Avec les monotonies démontrées précédemment on a montré que $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes.

Les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ étant adjacentes, elles ont la même limite.

On note exp la fonction qui à x fait correspondre cette limite.

3. Étude de la fonction exp

a. Vérifier que $\exp(0) = 1$.
$\forall n > |x|, u_n(0) = v_n(0) = 1$ donc $\exp(0) = 1$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 > |x|$ et $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$ on a :

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{h}{1+\frac{x}{n}}\right)$$

Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 > |x|$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$. On a :
$\left(1+\dfrac{x+h}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{h}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)^n$.

Or, vues les conditions imposées à x, n et h, on a : $\dfrac{h}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geq -1$, donc on obtient le résultat attendu en appliquant P.

c. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < 1$,

$$\exp(x) \times h \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \exp(x) \times \frac{h}{1-h}$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient : $\exp(x+h) \geq \exp(x)(1+h)$.
En prenant $x' = x+h$ et $h' = -h$, on obtient :
$\exp(x') \geq \exp(x'+h')(1-h')$ et comme $|h'| < 1, \exp(x'+h) \leq \dfrac{\exp(x')}{1-h'}$.
On a donc pour tout réel x, et pour $|h| < 1, \exp(x) \times h \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \exp(x) \times \dfrac{h}{1-h}$.

d. Démontrer que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie (ED).
L'encadrement précédent donne :

- Pour $h > 0$, $\quad \exp(x) \leq \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \dfrac{\exp(x)}{1-h}$
- Pour $h < 0$: $\quad \dfrac{\exp(x)}{1-h} \leq \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \exp(x)$

En faisant tendre h vers 0, on obtient d'après le théorème d'encadrement :
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$.
La fonction exp est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est elle-même.