Devoir maison 6 - Théorème de Cesaro

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \geq 1, \qquad c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

appelée **somme de Cesaro**.

I Théorème de Cesaro

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite (finie ou infinie), alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la même limite.

II Applications

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

a. Déterminer la fonction f telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

b. Étudier la convergence de la suite (u_n).

c. En appliquant le théorème de Cesaro à la suite de terme général $a_n = u_{n+1} - u_n$, déterminer la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n\frac{1+2v_n}{1+3v_n}$$

a. Étudier la convergence de la suite (v_n).

b. Après avoir justifié que la suite (v_n) ne s'annule pas, appliquer le théorème de Cesaro à la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}$ pour déterminer la limite de (nv_n).