Devoir maison 5 - Résolution d'une équation différentielle

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle :

$$\sin(x)y'' + \cos(x)y' + 2\sin(x)y = 0 \qquad (E_1)$$

On note $I_0 = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in I_0, \qquad \frac{1}{\cos^2(x)\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$$

$\forall x \in I_0$, on a :
$\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)\sin(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)\sin(x)}$

2. Résoudre dans I_0 l'équation différentielle :

$$\cos(x)\sin(x)y' + \left(\cos^2(x) - 2\sin^2(x)\right)y = 0 \qquad (E_2)$$

y solution de (E_2) sur I_0 si, et seulement si :
$\left(\forall x \in I_0,\ y'(x) + \left(\frac{\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\right)y(x) = 0\right)$
$\Leftrightarrow \left(\forall x \in I_0,\ y'(x) + \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)y(x) = 0\right)$
$\Leftrightarrow \left(\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I_0, y(x) = Ce^{-\ln(\sin(x)) - 2\ln(\cos(x))}\right)$ car sur $I_0, \cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$
$\Leftrightarrow \left(\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I_0,\ y(x) = \frac{C}{\cos^2(x)\sin(x)}\right)$

3. Montrer que $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est solution de (E_1).

$\forall x \in \mathbb{R}$,
$\sin(x)\varphi''(x) + \cos(x)\varphi'(x) + 2\sin(x)\varphi(x) = -\sin(x)\cos(x) - \cos(x)\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
donc φ est bien solution de (E_1).

4. On pose $y = z\varphi$.
Montrer que y est solution de (E_1) sur I_0 si, et seulement si z' est solution de (E_2) sur I_0.

y est solution de (E_1) sur I_0 si, et seulement si $\forall x \in I_0$
$\left(\sin(x)\left(z''(x)\varphi(x) + 2z'(x)\varphi'(x) + z(x)\varphi''(x)\right) + \cos(x)\left(z'(x)\varphi(x) + z(x)\varphi'(x)\right) + 2\sin(x)z(x)\varphi(x) = 0\right)$
$\Leftrightarrow \left(\sin(x)\varphi(x)z''(x) + \left(2\sin(x)\varphi'(x) + \cos(x)\varphi(x)\right)z'(x) + \underbrace{\left(\sin(x)\varphi''(x) + \cos(x)\varphi'(x) + 2\sin(x)\varphi(x)\right)}_{0 \text{ car } \varphi \text{ est solution de } (E_1)}z(x) = 0\right)$
$\Leftrightarrow \left(\sin(x)\cos(x)z''(x) + (-2\sin^2(x) + \cos^2(x))z'(x) = 0\right)$
$\Leftrightarrow z'$ solution de (E_2) sur I_0.

5. En déduire les solutions de (E_1) sur I_0.

$y = z\varphi$ est solution de (E_1) sur I_0 si, et seulement si :
$\left(\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I_0,\ z'(x) = \dfrac{C}{\cos^2(x)\sin(x)} = C\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} + \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}\right)\right)$
$\Leftrightarrow \left(\exists C \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I_0,\ z(x) = C\left(\dfrac{1}{\cos(x)} + \ln\left(\sin\dfrac{x}{2}\right) - \ln\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)\right) + K\right)$

Les solutions de (E_1) sur I_0 sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto C\left(1 + \cos(x)\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) + K\cos(x)$$

où C et K sont des constantes réelles.

6. Donner les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\cos(x)\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right) = -\infty$ donc les seules solutions de (E_1) sur I_0 qui se prolongent en 0 sont de la forme $K\varphi$, où K est une constante réelle (il faut $C = 0$).

Réciproquement, ces fonctions vérifient bien (E_1) pour tout réel x.