Devoir maison 4 - Fonction tangente hyperbolique

On considère la fonction th (appelée **tangente hyperbolique**) définie par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Justifier que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = 1 - (\mathrm{th}(x))^2$$

2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de th sur $\mathbb{R}^+$, puis faire l'étude de ses variations et le calcul de sa limite en $+\infty$.

3a. Justifier que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
La bijection réciproque de th se note Argth.

b. Déterminer Argth(0).

4. Expliquer pourquoi Argth est dérivable sur I et montrer que

$$\forall x \in I, \quad \mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

5a. Déterminer les réels a et b tels que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}$$

b. En déduire la forme explicite de $\mathrm{Argth}(x)$.

6. Retrouver le résultat précédent en résolvant pour $y \in I$ l'équation $\mathrm{th}(x) = y$ d'inconnue x.