Devoir maison 4 - Fonction tangente hyperbolique

On considère la fonction th (appelée **tangente hyperbolique**) définie par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Justifier que th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = 1 - (\mathrm{th}(x))^2$$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \neq 0$ et th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = 1 - (\mathrm{th}(x))^2$.

2. Montrer que l'on peut réduire l'étude de th sur $\mathbb{R}^+$, puis faire l'étude de ses variations et le calcul de sa limite en $+\infty$.

La fonction th est impaire. On peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} > 0$,
donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

3a. Justifier que la fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

Par parité, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$. La fonction th est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $I =]-1, 1[$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur I.

La bijection réciproque de th se note Argth.

b. Déterminer Argth(0).
$\mathrm{th}(0) = 0$ donc $\mathrm{Argth}(0) = 0$.

4. Expliquer pourquoi Argth est dérivable sur I et montrer que

$$\forall x \in I, \quad \mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - (\mathrm{th}(x))^2 \neq 0$ car $\mathrm{th}(x) \in]-1, 1[$. On en déduit que Argth est dérivable sur I et $\forall x \in I, \mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

5a. Déterminer les réels a et b tels que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t} \quad = \frac{1}{2(1 - t)} + \frac{1}{2(1 + t)}$$

b. En déduire la forme explicite de $\mathrm{Argth}(x)$.

$\forall x \in I,\ \mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$; on en déduit :

$\forall x \in I,\ \mathrm{Argth}(x) = -\dfrac{1}{2}\ln|1-x| + \dfrac{1}{2}\ln|1+x| + C^{te} = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + C^{te}$.

Commet $\mathrm{Argth}(0) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \mathrm{Argth}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

6. Retrouver le résultat précédent en résolvant pour $y \in I$ l'équation $\mathrm{th}(x) = y$ d'inconnue x.

$\forall y \in I,\ \mathrm{th}(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = y \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} + 1\right)} = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}(1-y) = 1+y$.

Ainsi, pour $y \in I$, $y \neq 1$ et $\mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ d'où $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) = \ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$