Devoir maison 3 - Nombres complexes

On considère l'équation
$$z^4+4z^3+6z^2+(6-2\mathrm{i})z+3-2\mathrm{i}=0$$

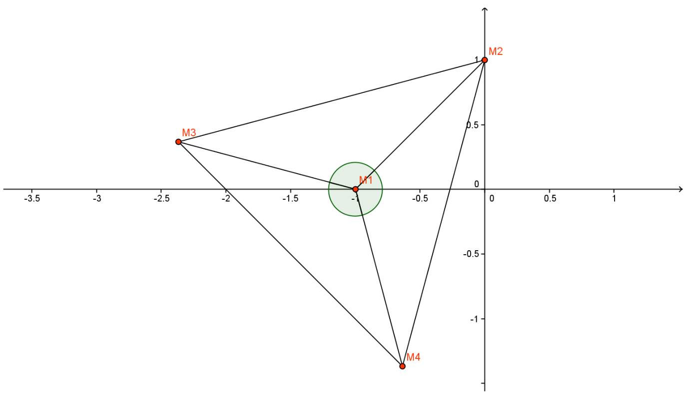
1. En effectuant le changement de variable $u=z+1$, déterminer les solutions de cette équation.

Si on note $P(z)=z^4+4z^3+6z^2+(6-2\mathrm{i})z+3-2\mathrm{i}$, alors $P(-1+u)=u(u^3+2-2\mathrm{i})$.
Les solutions de $P(-1+u)=0$ sont 0 et les racines cubiques de $-2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$, c'est-à-dire :
$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}=1+\mathrm{i}$, $\quad \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit les solutions de l'équation initiale :
$$z_1=-1,\quad z_2=\mathrm{i},\quad z_3=-\frac{\sqrt{3}+3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2},\quad z_4=\frac{\sqrt{3}-3}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

2. Montrer que les solutions de cette équation sont les affixes des sommets et du centre d'un triangle équilatéral :
On note M_1,M_2,M_3 et M_4 les points d'affixes z_1,z_2,z_3 et z_4 respectivement.

a. En calculant les modules ;
$|z_3-z_2|=|z_4-z_2|=|z_4-z_3|=\sqrt{6}$ donc le triangle $M_2M_3M_4$ est équilatéral ;
$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_4-z_1|=\sqrt{2}$ donc M_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle $M_2M_3M_4$.

b. En utilisant des rotations.
$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{z_4-z_1}{z_3-z_1}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$; on en déduit que M_3 (resp. M_4) est l'image de M_2 (resp. M_3) par la rotation de centre M_1 d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Le triangle $M_2M_3M_4$ est donc équilatéral de centre M_1.



En revenant à $P(-1+u)=0$ on peut également remarquer que les points M_2,M_3 et M_4 sont les images par la translation de vecteur d'affixe -1 de trois points qui sont les affixes des racines cubiques d'un même nombre qui forment donc un triangle équilatéral de centre O. Le point M_1 étant l'image de O par cette même translation, c'est le centre du triangle $M_2M_3M_4$.