Devoir maison 2 - Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m :

1. $$\frac{x-m+1}{m+2} < 1+x$$

Il faut $m \neq -2$

$$\frac{x-m+1}{m+2} < 1+x \Leftrightarrow \frac{x(m+1)+2m+1}{m+2} > 0 : \begin{cases} S = \varnothing & \text{si } m = -1 \\ S = \left]-\infty, -\dfrac{2m+1}{m+1}\right[& \text{si } -2 < m < -1 \\ S = \left]-\dfrac{2m+1}{m+1}, +\infty\right[& \text{si } m < -2 \text{ ou } -1 < m \end{cases}$$

2. $$\sqrt{2x+m} \geq x+1$$

Il faut $x \geq -\dfrac{m}{2}$.

⇝ Si $-\dfrac{m}{2} \leq -1$, ce qui équivaut à $m \geq 2$:

- Pour $x+1 \leq 0$, ce qui équivaut à $x \leq -1$, l'inégalité est toujours vérifiée ;
- Pour $x+1 \geq 0$ ce qui équivaut à $x \geq -1$ l'inégalité est équivalente à $m-1 \geq x^2$.
  Comme $m \geq 2$ c'est équivalent à $x \in \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right]$.
  De plus, $m \geq 2 \Rightarrow -\sqrt{m-1} \leq -1$. Ainsi, si $m \geq 2, x \in \left[-\dfrac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right]$.

⇝ Si $m \leq 2$, on ne peut pas avoir $x < -1$ car il faut $x \geq -\dfrac{m}{2}$.
L'inégalité est alors équivalente à $m-1 \geq x^2$. Comme $m \leq 2$ deux cas se présentent :

- Si $m < 1$, il n'y a pas de solution ;
- Si $m \geq 1$, alors $x \in \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right]$ et on a bien $-\dfrac{m}{2} \leq -\sqrt{m-1}$ dans ce cas car $m > 0$ donc $-\dfrac{m}{2} \leq -\sqrt{m-1} \Leftrightarrow m^2 \geq 4m-4 \Leftrightarrow (m-2)^2 \geq 0$.

Finalement, $\begin{cases} S = \varnothing & \text{si } m < 1 \\ S = \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right] & \text{si } 1 \leq m \leq 2 \\ S = \left[-\dfrac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right] & \text{si } m \geq 2 \end{cases}$

3. $$\frac{m}{x-3} > \frac{2}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(m-2)+m+6}{(x-3)(x+1)} > 0$$

⇝ Si $m = 2, x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$.

⇝ Si $m \neq 2$, toute la difficulté réside dans le positionnement de $\dfrac{m+6}{2-m}$ par rapport à -1 et 3.

- Si $\dfrac{m+6}{2-m} < -1$ ce qui équivaut à $\dfrac{8}{2-m} < 0$ donc à $m > 2$:

x	$-\infty$		$\frac{m+6}{2-m}$		-1		3		$+\infty$
$(x-3)(x+1)$		$+$	|	$+$	|	$-$	|	$+$	
$(m-2)x+m+6$		$-$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{x(m-2)+m+6}{(x-3)(x+1)}$		$-$	|	$+$	||	$-$	||	$+$	

- Si $\dfrac{m+6}{2-m} > 3$ ce qui équivaut à $\dfrac{4m}{2-m} > 0$ donc à $m \in]0,2[$:

x	$-\infty$		-1		3		$\frac{m+6}{2-m}$		$+\infty$
$(x-3)(x+1)$		+	|	−	|	+	|	+	
$(m-2)x+m+6$		+	|	+	|	+	|	−	
$\frac{x(m-2)+m+6}{(x-3)(x+1)}$		+	||	−	||	+	|	−	

- Si $m \leq 0$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{m+6}{2-m}$		3		$+\infty$
$(x-3)(x+1)$		+	|	−	|	−	|	+	
$(m-2)x+m+6$		+	|	+	|	−	|	−	
$\frac{x(m-2)+m+6}{(x-3)(x+1)}$		+	||	−	|	+	||	−	

Finalement, $\begin{cases} S =]-\infty,-1[\cup\left]\dfrac{m+6}{2-m},3\right[& \text{si } m \leq 0 \\ S =]-\infty,-1[\cup\left]3,\dfrac{m+6}{2-m}\right[& \text{si } 0 < m < 2 \\ S =]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[& \text{si } m = 2 \\ S = \left]\dfrac{m+6}{2-m},-1\right[\cup]3,+\infty[& \text{si } m > 2 \end{cases}$