Devoir maison 1 - Etude de suites

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g(x) = n$ admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée a_n, l'autre strictement positive notée b_n.

2. Recherche d'une valeur approchée de a_2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Montrer que $-2 < a_2 < -1$.

b. Vérifier que $\mathrm{e}^{a_2} - 2 = a_2$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_2 \leq u_n \leq -1$$

c. Montrer que :

$$\forall x \in [a_2, -1], \qquad 0 \leq \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2} \leq \mathrm{e}^{-1}(x - a_2)$$

d. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_{n+1} - a_2 \leq \mathrm{e}^{-1}(u_n - a_2),$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n - a_2 \leq \mathrm{e}^{-n}$$

e. Écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur de a_2 par excès à p près, p étant un réel strictement positif donné.

3. Étude de la suite (b_n) :

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad \ln(n) \leq b_n \leq \ln(2n)$$

b. En déduire la limite de (b_n) et de $\left(\dfrac{b_n}{\ln(n)}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.