Devoir maison 1 - Etude de suites

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g(x) = n$ admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée a_n, l'autre strictement positive notée b_n.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
On en déduit que g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Les limites des fonctions usuelles donnent $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et le théorème des croissances comparées donne $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
Comme $g(0) = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires donne le résultat attendu.

x	$-\infty$	a_n	0	b_n	$+\infty$
g	$+\infty$	n	1	n	$+\infty$

2. Recherche d'une valeur approchée de a_2 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dans la suite, on notera h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x - 2$.
Pour tout entier n on a $u_{n+1} = h(u_n)$.
On remarque d'ores et déjà que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $-2 < a_2 < -1$.
On a : $g(-1) < 2 < g(-2)$ d'où, g étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, $-2 < a_2 < -1$.

b. Vérifier que $\mathrm{e}^{a_2} - 2 = a_2$
Par définition, a_2 vérifie $g(a_2) = 2$ ce qui équivaut à $\mathrm{e}^{a_2} - a_2 = 2$ et donc $\mathrm{e}^{a_2} - 2 = a_2$ (qui équivaut à $h(a_2) = a_2$)
et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_2 \leq u_n \leq -1$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n : a_2 \leq u_n \leq -1$.
D'après la question **a.**, P_0 est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que P_n est vérifiée, donc que $a_2 \leq u_n \leq -1$.
Par croissance de h on a : $a_2 \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e}^{-1} - 2 < -1$, ainsi, P_{n+1} est vérifiée.
Par principe de récurrence P_n est vérifiée pour tout entier n.

c. Montrer que :

$$\forall x \in [a_2, -1], \qquad 0 \leq \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2} \leq \mathrm{e}^{-1}(x - a_2)$$

On a : $x \in [a_2, -1] \Rightarrow \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{a_2}$ d'où $\forall x \in [a_2, -1]$, $0 \leq \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2}$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-1}x$ est dérivable sur son domaine comme somme de fonctions dérivables, et pour tout réel x on a : $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-1}$. Elle est donc strictement décroissante sur $[a_2, -1]$.
On en déduit que $\mathrm{e}^{a_2} - \mathrm{e}^{-1}a_2 \geq \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-1}x$ puis que $\forall x \in [a_2, -1]$, $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{a_2} \leq \mathrm{e}^{-1}(x - a_2)$.

d. En déduire que :

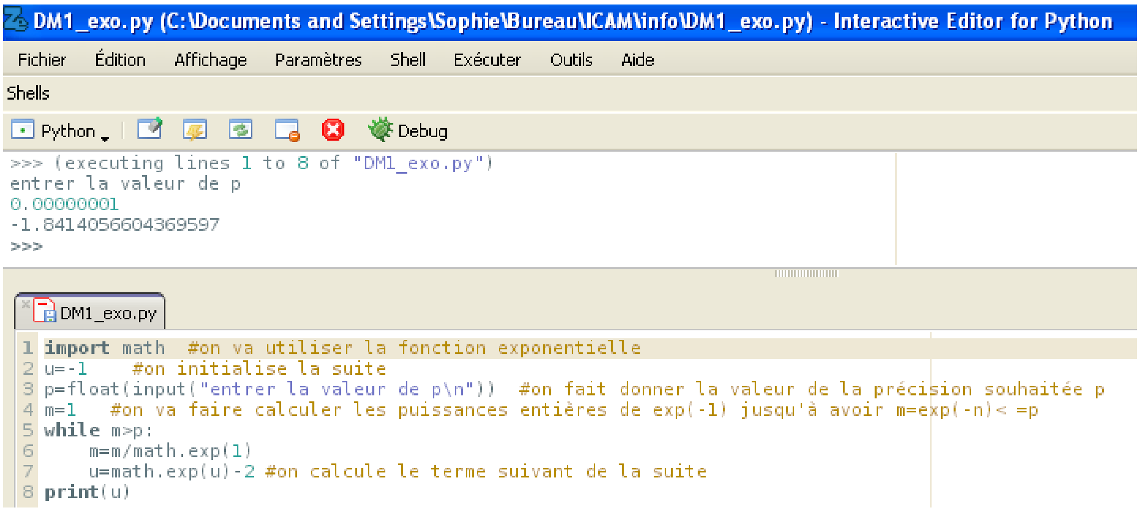
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_{n+1} - a_2 \leq \mathrm{e}^{-1}\left(u_n - a_2\right),$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - a_2 = \mathrm{e}^{u_n} - 2 - a_2 = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{a_2}$; la question **b.** donne $\forall n \in \mathbb{N},\ a_2 \leq u_n \leq -1$
La question **c.** donne le résultat attendu
puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n - a_2 \leq \mathrm{e}^{-n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n :\ 0 \leq u_n - a_2 \leq \mathrm{e}^{-n}$.
D'après la question **a.**, H_0 est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que H_n est vérifiée, donc que $0 \leq u_n - a_2 \leq \mathrm{e}^{-n}$.
D'après le résultat précédent, on a donc : $0 \leq u_{n+1} - a_2 \leq \mathrm{e}^{-1}\left(u_n - a_2\right) \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}$, ainsi H_{n+1} est vérifiée.
Par principe de récurrence, H_n est vérifiée pour tout entier naturel n.

e. Écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur de a_2 par excès à p près, p étant un réel strictement positif donné.
Le principe consiste à calculer les termes de la suite jusqu'à avoir $0 \leq u_n - a_2 \leq \mathrm{e}^{-n} \leq p$.
u_n est alors bien une valeur approchée de a_2 par excès à p près.



3. Étude de la suite (b_n) :

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad \ln(n) \leq b_n \leq \ln(2n)$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ g(\ln(n)) = n - \ln(n) \leq n$ donc $\ln(n) \leq b_n$.
$g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n)$. Une rapide étude de la fonction $x \mapsto x - \ln(2x)$ montre qu'elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ g(\ln(2n)) \geq n$ et par suite que $b_n \leq \ln(2n)$.

b. En déduire la limite de (b_n) et de $\left(\dfrac{b_n}{\ln(n)}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n) \leq b_n$ donc le théorème de comparaison donne $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.

De plus, $\forall n \geq 2, (\ln(n) \leq b_n \leq \ln(2n)) \Rightarrow \left(1 \leq \dfrac{b_n}{\ln(n)} \leq 1 + \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}\right)$.

Le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b_n}{\ln(n)} = 1$.