

DEVOIR MAISON 1 - ETUDE DE SUITES

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^x - x$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g(x) = n$ admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée a_n , l'autre strictement positive notée b_n .

g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$.

On en déduit que g est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Les limites des fonctions usuelles donnent $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et le théorème des croissances comparées donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Comme $g(0) = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires donne le résultat attendu.

x	$-\infty$	a_n	0	b_n	$+\infty$
g	$+\infty$	\swarrow	\downarrow	\searrow	$+\infty$

2. Recherche d'une valeur approchée de a_2 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = e^{u_n} - 2, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dans la suite, on notera h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = e^x - 2$.

Pour tout entier n on a $u_{n+1} = h(u_n)$.

On remarque d'ores et déjà que h est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- a. Montrer que $-2 < a_2 < -1$.

On a : $g(-1) < 2 < g(-2)$ d'où, g étant strictement décroissante sur \mathbb{R}^- , $-2 < a_2 < -1$.

- b. Vérifier que $e^{a_2} - 2 = a_2$

Par définition, a_2 vérifie $g(a_2) = 2$ ce qui équivaut à $e^{a_2} - a_2 = 2$ et donc $e^{a_2} - 2 = a_2$ (qui équivaut à $h(a_2) = a_2$)

et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_2 \leq u_n \leq -1$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n : a_2 \leq u_n \leq -1$.

D'après la question a., P_0 est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que P_n est vérifiée, donc que $a_2 \leq u_n \leq -1$.

Par croissance de h on a : $a_2 \leq u_{n+1} \leq e^{-1} - 2 < -1$, ainsi, P_{n+1} est vérifiée.

Par principe de récurrence P_n est vérifiée pour tout entier n .

- c. Montrer que :

$$\forall x \in [a_2, -1], \quad 0 \leq e^x - e^{a_2} \leq e^{-1} (x - a_2)$$

On a : $x \in [a_2, -1] \Rightarrow e^x \geq e^{a_2}$ d'où $\forall x \in [a_2, -1], 0 \leq e^x - e^{a_2}$.

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - e^{-1}x$ est dérivable sur son domaine comme somme de fonctions dérivables, et pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x - e^{-1}$. Elle est donc strictement décroissante sur $[a_2, -1]$.

On en déduit que $e^{a_2} - e^{-1}a_2 \geq e^x - e^{-1}x$ puis que $\forall x \in [a_2, -1], e^x - e^{a_2} \leq e^{-1} (x - a_2)$.

d. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - a_2 \leq e^{-1}(u_n - a_2),$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - a_2 = e^{u_n} - 2 - a_2 = e^{u_n} - e^{a_2}$; la question **b.** donne $\forall n \in \mathbb{N}, a_2 \leq u_n \leq -1$
La question **c.** donne le résultat attendu

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - a_2 \leq e^{-n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H_n : 0 \leq u_n - a_2 \leq e^{-n}$.

D'après la question **a.**, H_0 est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que H_n est vérifiée, donc que $0 \leq u_n - a_2 \leq e^{-n}$.

D'après le résultat précédent, on a donc : $0 \leq u_{n+1} - a_2 \leq e^{-1}(u_n - a_2) \leq e^{-(n+1)}$, ainsi H_{n+1} est vérifiée.

Par principe de récurrence, H_n est vérifiée pour tout entier naturel n .

e. Écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur de a_2 par excès à p près, p étant un réel strictement positif donné.

Le principe consiste à calculer les termes de la suite jusqu'à avoir $0 \leq u_n - a_2 \leq e^{-n} \leq p$.
 u_n est alors bien une valeur approchée de a_2 par excès à p près.

The screenshot shows a Python IDE window titled "DM1_exo.py (C:\Documents and Settings\Sophie\Bureau\ICAM\info\DM1_exo.py) - Interactive Editor for Python". The menu bar includes "Fichier", "Édition", "Affichage", "Paramètres", "Shell", "Exécuter", "Outils", and "Aide". The "Shells" bar shows "Python" and "Debug". The console output shows the execution of lines 1 to 8 of "DM1_exo.py", with the user inputting "0.00000001" for the precision value 'p', resulting in the output "-1.8414056604369597". Below the console, the source code of "DM1_exo.py" is displayed:

```

1 import math #on va utiliser la fonction exponentielle
2 u=-1 #on initialise la suite
3 p=float(input("entrer la valeur de p\n")) #on fait donner la valeur de la précision souhaitée p
4 m=1 #on va faire calculer les puissances entières de exp(-1) jusqu'à avoir m=exp(-n)<=p
5 while m>p:
6     m=m/math.exp(1)
7     u=math.exp(u)-2 #on calcule le terme suivant de la suite
8 print(u)

```

3. Étude de la suite (b_n) :

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad \ln(n) \leq b_n \leq \ln(2n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, g(\ln(n)) = n - \ln(n) \leq n$ donc $\ln(n) \leq b_n$.

$g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n)$. Une rapide étude de la fonction $x \mapsto x - \ln(2x)$ montre qu'elle est positive sur \mathbb{R}_+^* , donc que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, g(\ln(2n)) \geq n$ et par suite que $b_n \leq \ln(2n)$.

b. En déduire la limite de (b_n) et de $\left(\frac{b_n}{\ln(n)}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(n) \leq b_n$ donc le théorème de comparaison donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

De plus, $\forall n \geq 2, (\ln(n) \leq b_n \leq \ln(2n)) \Rightarrow \left(1 \leq \frac{b_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right)$.

Le théorème d'encadrement donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{\ln(n)} = 1$.