Devoir maison 14 - Primitives de fonctions trigonométriques

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $]-\pi,\pi[$ par :

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$$

1. Calculer $f_0(x), f_1(x)$ et $f_2(x)$.
On pourra effectuer le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$.

2a. Justifier que l'on peut réduire l'étude de f_n à l'intervalle $[0,\pi[$, puis étudier ses variations sur cet intervalle.

b. Déterminer le développement limité de $f_n(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

c. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 0, et la position de cette courbe par rapport à la tangente (en discutant suivant les valeurs de n).

3a. Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[, \quad \left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^x \frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right| \geq \frac{1}{2^n}\left(\tan\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right)$$

b. En déduire les limites de f_n en π et $-\pi$.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de f_n sur $]-\pi,\pi[$ en fonction des valeurs de n.

4. En remarquant que

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]-\pi,\pi[, \quad \frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)} = \cos(t)\frac{\cos^{n-1}(t)}{1+\cos(t)},$$

trouver une relation entre $f_n(x), f_{n-1}(x)$ et $f_{n-2}(x)$ pour $n \geq 2$.