Devoir maison 14 - Primitives de fonctions trigonométriques

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $]-\pi,\pi[$ par :

$$f_n(x)=\int_0^x \frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$$

1. Calculer $f_0(x)$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
On pourra effectuer le changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$.

Si on pose $u=\tan\frac{t}{2}$ alors on a : $\cos(t)=2\cos^2\frac{t}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{t}{2}}-1=\frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

et $\mathrm{d}u=\frac{1+u^2}{2}\mathrm{d}t$. On peut appliquer le théorème de changement de variable.

$f_0(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}\underbrace{=}_{u=\tan\frac{x}{2}}\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_0^{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}u=\tan\frac{x}{2}$

$f_1(x)=\int_0^x \frac{\cos(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1+\cos(t)-1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+\cos(t)}\right)\mathrm{d}t=x-\tan\frac{x}{2}$

$f_2(x)=\int_0^x \frac{\cos^2(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{\cos^2(t)-1+1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\cos(t)-1+\frac{1}{1+\cos(t)}\right)\mathrm{d}t$
$=\sin(x)-x+\tan\frac{x}{2}$

2a. Justifier que l'on peut réduire l'étude de f_n à l'intervalle $[0,\pi[$, puis étudier ses variations sur cet intervalle.

$\forall x\in]-\pi,\pi[,\ f_n(-x)=\int_0^{-x}\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\underbrace{=}_{u=-t}\int_0^x\frac{\cos^n(u)}{1+\cos(u)}(-\mathrm{d}u)=-f_n(x)$;

la fonction f_n étant impaire, on peut l'étudier sur $[0,\pi[$.

La fonction $t\mapsto\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}$ est continue sur $[0,\pi[$, le théorème fondamental de l'intégration donne donc f_n dérivable sur ce domaine et $\forall x\in[0,\pi[,\quad f_n'(x)=\frac{\cos^n(x)}{1+\cos(x)}$.

- Si n est pair, $\forall x\in[0,\pi[,\ f_n'(x)\geq 0$ donc f_n est croissante sur $[0,\pi[$.
- Si n est impair, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ f_n'(x)\geq 0$ et $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[,\ f_n'(x)\leq 0$ donc f_n est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

b. Déterminer le développement limité de $f_n(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

$$f_n'(x)=\frac{\cos^n(x)}{1+\cos(x)}\underset{x\to0}{=}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^n}{2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\underset{x\to0}{=}\frac{1-n\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{2\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)}\underset{x\to0}{=}\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{8}x^2+o(x^2).$$

Comme $f_n(0)=0$, on a par intégration : $f_n(x)\underset{x\to0}{=}\frac{x}{2}-\frac{2n-1}{24}x^3+o(x^3)$.

c. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse 0, et la position de cette courbe par rapport à la tangente (en discutant suivant les valeurs de n).

On déduit de la question précédente que la courbe représentative de f_n admet une tangente à l'origine d'équation $y=\frac{x}{2}$ et que :

- Si $n=0$, $f_0(x)-\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{24}x^3+o(x^3)$ donc la courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0^+ et en-dessous au voisinage de 0^-.
- Si $n\neq 0$, $f_n(x)-\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{2n-1}{24}x^3+o(x^3)$ donc la courbe est en-dessous de la tangente au voisinage de 0^+ est au-dessus au voisinage de 0^-.

3a. Montrer que :

$$\forall x\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[,\quad \left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right|\geq \frac{1}{2^n}\left(\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)$$

Soit $x\geq \dfrac{2\pi}{3}$; $t\mapsto \dfrac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}$ est de signe constant sur $\left[\dfrac{2\pi}{3},x\right]$ (négatif) et $\forall t\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[$, $|\cos(t)|\geq\dfrac{1}{2}$.

On a donc : $\left|\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{|\cos^n(t)|}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\geq\frac{1}{2^n}\left(\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)$

b. En déduire les limites de f_n en π et $-\pi$.

Le théorème de comparaison donne : $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right|=+\infty.$

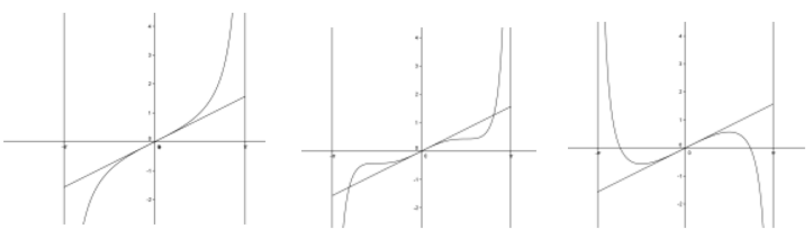
$f_n(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{x}\frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\quad$ donc $\quad\displaystyle\lim_{x\to\pi}|f_n(x)|=+\infty.$

En tenant compte de la parité et du signe de $f_n(x)$, on a :

- Si n est pair, $\displaystyle\lim_{x\to\pi}f_n(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}f_n(x)=-\infty$;
- Si n est impair, $\displaystyle\lim_{x\to\pi}f_n(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}f_n(x)=+\infty$.

c. Donner l'allure de la courbe représentative de f_n sur $]-\pi,\pi[$ en fonction des valeurs de n.

si $n=0$: si $n>0$, pair : si $n>0$, impair :



4. En remarquant que

$$\forall n\geq 1,\forall t\in]-\pi,\pi[,\quad \frac{\cos^n(t)}{1+\cos(t)}=\cos(t)\frac{\cos^{n-1}(t)}{1+\cos(t)},$$

trouver une relation entre $f_n(x), f_{n-1}(x)$ et $f_{n-2}(x)$ pour $n\geq 2$.

Soient u et v définies sur $]-\pi,\pi[$ par $u(t)=\dfrac{\cos^{n-1}(t)}{1+\cos(t)}$ et $v(t)=\sin(t)$.

u et v sont de classes C^1 sur leur domaine ; le théorème d'intégration par parties donne, pour $x\in]-\pi,\pi[$:

$$f_n(x)=\int_0^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(t)\cos^{n-1}(t)}{1+\cos(t)}\right]_0^x+(n-1)\int_0^x\frac{\sin^2(t)\cos^{n-2}(t)}{(1+\cos(t))^2}\mathrm{d}t+(n-2)\int_0^x\frac{\sin^2(t)\cos^{n-1}(t)}{(1+\cos(t))^2}\mathrm{d}t$$

Or, $\forall t\in]-\pi,\pi[$, $\dfrac{\sin^2(t)}{(1+\cos(t))^2}=\dfrac{1-\cos^2(t)}{(1+\cos(t))^2}=\dfrac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}$ d'où :

$$\forall x\in]-\pi,\pi[, f_n(x)=\frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{1+\cos(x)}+(n-1)\left(f_{n-2}(x)-f_{n-1}(x)\right)+(n-2)\left(f_{n-1}(x)-f_n(x)\right).$$

Finalement, $\forall x\in]-\pi,\pi[,\quad (n-1)f_n(x)=\dfrac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{1+\cos(x)}+(n-1)f_{n-2}(x)-f_{n-1}(x).$