Devoir maison 13 - Applications linéaires

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, m un réel et $f_m \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & m & m \\ m & \frac{1}{3} & m \\ m & m & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs du paramètre m pour que f_m soit bijective.

On est en dimension finie donc f_m est bijective si, et seulement si elle est injective. On cherche donc m tel que $\mathrm{Ker}(f_m) = \{0\}$.
On trouve $m \notin \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right\}$.

2. On suppose que $m = 1$, et on note $f = f_1$.

a. Déterminer les réels λ tels que $g_\lambda = f - \lambda \mathrm{Id}_E$ ne soit pas bijective.
$\lambda \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right\}$.

b. Pour chacune de ces valeurs λ, déterminer $\mathrm{Ker}(g_\lambda)$.
$\mathrm{Ker}\left(g_{-\frac{2}{3}}\right) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ et $\mathrm{Ker}\left(g_{\frac{7}{3}}\right) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$.

c. Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}'$ soit diagonale.
Soient $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (0,1,-1)$.
On vérifie rapidement que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, et comme elle est de cardinal 3, c'est une base de E.
D'après ce qui précède, $f(v_1) = \frac{7}{3}v_1$, $f(v_2) = -\frac{2}{3}v_3$ et $f(v_3) = -\frac{2}{3}v_3$.
Ainsi la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$