

DEVOIR MAISON 12 - ESPACES VECTORIELS

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 1, 1), \quad e_2 = (2, 1, -1, 0), \quad e_3 = (1, 1, 0, -1), \quad e_4 = (1, -1, 1, -1), \quad e_5 = (1, 1, 2, -1)$$

1. Les familles suivantes sont-elles libres ?

- a. $\{e_1, e_2, e_3\}$ oui
- b. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ oui
- c. $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ non : $e_1 - e_2 + 2e_3 - e_5 = 0$

2. Soient $F = \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ et $G = \text{Vect}\{e_4, e_5\}$

- a. Déterminer une base de $F \cap G$. $F \cap G = \text{Vect}\{e_5\}$
- b. Déterminer un supplémentaire de G dans \mathbb{R}^4 . $\text{Vect}\{e_1, e_2\}$

3. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z = 0 \text{ et } y - z + t = 0\}$.

- a. Déterminer $F \cap H$. $F \cap H = H = \text{Vect}\{e_1, e_3\}$
- b. Montrer que G et H sont supplémentaires. $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$ est une famille libre de cardinal 4.