Devoir maison 11 - Polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1}\right)$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$ on définit

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1a. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^{2n+1} - 1$.

b. En déduire que les racines de P_n sont les nombres

$$\zeta_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \qquad \text{où} \quad k \in [\![-n, n]\!] \setminus \{0\}$$

2. Montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$$

3. Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

4a. Calculer la somme S_n définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2$$

b. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; exprimer $\dfrac{1}{\sin^2(\theta)}$ en fonction de $\operatorname{cotan}(\theta)$.

c. Calculer la somme T_n définie par

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

5. Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\operatorname{cotan}^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$$

6. Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.