Devoir maison 11 - Polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1}\right)$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$ on définit

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1a. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^{2n+1} - 1$.
Ce sont les $(2n+1)$-èmes racines de l'unité : $\left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}, k \in [\![-n,n]\!]\right\}$.

b. En déduire que les racines de P_n sont les nombres

$$\zeta_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \qquad \text{où} \quad k \in [\![-n,n]\!] \setminus \{0\}$$

On remarque que i n'est pas une racine de P_n donc :
$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \left((x+\mathrm{i})^{2n+1} = (x-\mathrm{i})^{2n+1}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}}\right)^{2n+1} = 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x+\mathrm{i}}{x-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}, k \in [\![-n,n]\!]\right)$
On voit que pour $k=0$ l'égalité est impossible. On a donc :
$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}+1\right)}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}}-1} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n+1}} 2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n+1}} 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \zeta_k, k \in [\![-n,n]\!] \setminus \{0\}\right)$

2. Montrer que

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$$

La formule du binôme donne :
$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \mathrm{i}^p \underbrace{\left(1+(-1)^{p+1}\right)}_{\text{nul pour } p \text{ pair}} X^{2n+1-p} \underset{p=2k+1}{=} \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (\mathrm{i})^{2k+1} 2 X^{2(n-k)}$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{2(n-k)}$
On remarque à ce stade que P_n est un polynôme pair, de degré $2n$ et de coefficient dominant $2n+1$.

3. Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

Q_n a pour racines $\zeta_k^2, k \in [\![-n,n]\!] \setminus \{0\}$, il est degré n (car P_n est de degré $2n$) et de même coefficient dominant que P_n. On a donc

$$Q_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} (X - \zeta_k^2)$$

4a. Calculer la somme S_n définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2$$

On a $Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k} = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} (X - \zeta_k^2)$.
En utilisant la formule qui donne la somme des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients, on obtient : $S_n = \dfrac{\binom{2n+1}{3}(-1)}{2n+1} = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

b. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; exprimer $\dfrac{1}{\sin^2(\theta)}$ en fonction de $\operatorname{cotan}(\theta)$.

$\dfrac{1}{\sin^2(\theta)} = \dfrac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \operatorname{cotan}^2(\theta) + 1.$

c. Calculer la somme T_n définie par

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1\right) = S_n + n = \frac{2n(n+1)}{3}.$

5. Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\operatorname{cotan}^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; la fonction sinus (resp. tangente) est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ de dérivée $x \mapsto \cos(x)$ (resp. $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$).
Le théorème des accroissements finis donne pour tout $x \in [0, a]$:
✓ $\exists b \in]0, x[, \quad \sin(x) - \sin(0) = \underbrace{\cos b}_{\in]0,1[} (x - 0) \leq x$
✓ $\exists c \in]0, x[, \quad \tan(x) - \tan(0) \leq \underbrace{(1 + \tan^2(c))}_{\geq 1} (x - 0) \geq x.$

Ainsi, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) \geq x \geq \sin(x) > 0$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{1}{\tan^2(x)} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ ou encore : $\operatorname{cotan}^2(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(x)}$

6. Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

$\forall k \in [\![1, n]\!], \dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc d'après la question précédente :

$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \left(\dfrac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leq \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$

Donc en sommant, on obtient :
$S_n \leq \left(\dfrac{2n+1}{\pi}\right)^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq T_n \Leftrightarrow \frac{n(2n-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2n(n+1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}.$
Le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$