Devoir maison 10 - Géométrie et nombres complexes

Dans l'ensemble du problème on se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

PARTIE I : Préliminaires

Soient IJK un triangle équilatéral direct non réduit à un point, et Γ son cercle circonscrit.
On note $\widehat{IJ}$ l'arc de cercle de Γ d'extrémités I et J incluses, ne contenant pas le point K.
On note r_1 la rotation de centre I qui transforme J en K.
Soient M un point du plan, et $M_1 = r_1(M)$.

1a. Montrer que $MI + MJ = MM_1 + M_1K$.

b. En déduire que $MI + MJ \geq MK$.

2a. Montrer que $MI + MJ = MK$ si, et seulement si M_1 appartient au segment $[MK]$.

b. Montrer que $MI + MJ = MK$ si, et seulement si M appartient à $\widehat{IJ}$.

PARTIE II

Soient a, b et c des réels strictement positifs, et A, B et C les points d'affixes respectives $-a, b$ et $\mathrm{i}c$.
On suppose que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ est dans l'intervalle $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$.
On note j le nombre complexe $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Soient A', B' et C' les points du plan tels que CBA', ACB' et BAC' soient des triangles équilatéraux directs. On note ω, ω' et ω'' les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

1a. Calculer $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$.

b. Démontrer que $\omega = a - b\mathrm{j}^2 - c\mathrm{j}\mathrm{i}$.

c. Montrer que $\omega' = \omega\mathrm{j}$ et $\omega'' = \omega\mathrm{j}^2$.

d. Justifier que $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et que $AA' = BB' = CC'$.

2a. Montrer que toute droite passant par un point M_0 d'affixe z_0 admet une équation complexe de la forme

$$u(\overline{z} - \overline{z_0}) - \overline{u}(z - z_0) = 0$$

où $u \in \mathbb{C}$.

b. Démontrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') ademttent pour équations respectives :

$$\omega(\overline{z} + a) - \overline{\omega}(z + a) = 0$$

$$\omega\mathrm{j}(\overline{z} - b) - \overline{\omega}\mathrm{j}^2(z - b) = 0$$

$$\omega\mathrm{j}^2(\overline{z} + \mathrm{i}c) - \overline{\omega}\mathrm{j}(z - \mathrm{i}c) = 0$$

c. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point F.

PARTIE III

On admet que le point F est situé à l'intérieur du triangle ABC.

1a. Démontrer que $\left(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA'}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

b. En déduire que le point F appartient au cercle circonscrit au triangle CBA'.

Dans la suite on pourra utiliser les résultats établis dans la partie I.

2. Soit f l'application définie pour tout point du plan M par $f(M) = MA + MB + MC$.

a. Montrer que $f(F) = AA'$.

b. Montrer que pour tout point M du plan , $f(M) \geq AA'$, puis que si M n'appartient pas à la droite (AA') alors $f(M) > AA'$.

c. En déduire que pour tout point M du plan distinct de F, $f(M) > AA'$.

3. Démontrer que f admet un minimum, atteint en un seul point.