Math. - CC 2 -

11/12/2023

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et, pour } n \neq 0, \qquad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

1. Calculer W_0 et W_1.

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n > 0$.

3. a. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

b. Déduire des questions **2.a** et **3.a** que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

4. a. Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})$ est constante (et préciser cette constante).

b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{2n} W_n = \sqrt{\pi}$.

5. a. Montrer que $I_n = \sqrt{n} W_{2n+1}$.
On posera le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ dans l'intégrale I_n.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

EXERCICE II

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - y' + y = x^4 \qquad (L)$$

Partie II

Le but de cette partie est de trouver les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - xy' + y = x^4 \qquad (E)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{x} y = x \qquad (E_1)$$

2. On va chercher les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sous la forme $\varphi : x \mapsto x\lambda(x)$ où λ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, deux fois dérivable.

a. Déterminer φ' et φ'' à l'aide de λ, λ' et λ''.

b. Montrer que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si λ' est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déduire des questions précédentes l'expression de λ, puis de φ.

EXERCICE III

1. Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

EXERCICE IV

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes : $\quad A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \quad$ et $\quad B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

1. Calculer $A_n + B_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, A_n - B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.

b. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$ en fonction de n (on discutera selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

3. En déduire une expression simplifiée de A_n et de B_n en fonction de n.

EXERCICE V

On propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z - 6 = 0 \qquad (\mathscr{E})$$

1. On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de $(\mathscr{E})$. Soient alors $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $u + v = z$ et $uv = 2$.

a. Justifier que $(u+v)^3 = 6(u+v) + 6$ et montrer que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 6(u+v)$.

b. En déduire $u^3 + v^3$ et déterminer u^3v^3.

c. Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 - 6Z + 8 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

d. Résoudre l'équation $Z^2 - 6Z + 8 = 0$.

2. a. Résoudre l'équation $W^3 = 2$, d'inconnue $W \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.

b. Résoudre l'équation $W^3 = 4$, d'inconnue $W \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme trigonométrique.

c. A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.

d. En déduire les solutions de $(\mathscr{E})$.