Math. - CC 4 -

12/05/2023

Toutes les réponses seront justifiées. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

EXERCICE I

On considère les ensembles suivants :
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-2z=0\}$
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-6y=0\}$
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x+y-3z=0\}$

1. Montrer que E, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer des bases.

2. a. <u>Sans calculer $E \cap F$</u>, justifier que $\dim(E \cap F) \geq 1$.

b. Montrer que $(E \cap F) \oplus G = \mathbb{R}^3$

3. a. Justifier que l'on peut trouver une base de $E \cap F$ à l'aide d'un produit vectoriel, puis la déterminer.

b. Retrouver le résultat $(E \cap F) \oplus G = \mathbb{R}^3$.

EXERCICE II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension admettent un supplémentaire commun.
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $r \in [\![0, n]\!]$.

1. On suppose dans cette question que $r = n$.
Montrer que E_1 est E_2 ont un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\quad E_1 \oplus F = E_2 \oplus F = E$

2. On suppose que $r < n$ et que si F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension $r+1$ alors ils admettent un supplémentaire commun dans E.

a. Montrer que $E_1 \cup E_2 \neq E$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $x \notin E_1$ et $x \notin E_2$.

b. On note $F_1 = E_1 + \mathrm{Vect}\{x\}$ et $F_2 = E_2 + \mathrm{Vect}\{x\}$. Déterminer $\dim(F_1)$ et $\dim(F_2)$.

c. Montrer que E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun.

3. Conclure.

EXERCICE III

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), MA = AM = M\}$.

1. a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour les lois usuelles.

b. Montrer qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in E$

a. Montrer que $a = c = g = k, \quad h = b, \quad$ et $f = d$, puis en déduire une base de E.

b. On considère le sous-ensemble F de E tel que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

3. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ de F associe le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$.

a. Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

c. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

PROBLEME

L'objectif de ce problème est de montrer par l'absurde que le nombre π est irrationnel (**Théorème de Lambert, 1761**). On suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \dfrac{p}{q}$.

1. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$$

a. Déterminer les racines de P_n et leurs multiplicités respectives.

b. Déterminer explicitement les coefficients a_k de P_n.

c. En déduire, à l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, que pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

d. Montrer que

$$P_n\left(\frac{p}{q} - X\right) = P_n(X)$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (-1)^k P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q} - X\right) = P_n^{(k)}(X)$$

e. En déduire que pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$$

2. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{p}{q}} P_n(t) \sin(t) \mathrm{d}t$$

a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |I_n| \leq \frac{p^{2n+1}}{n!}$$

b. En déduire que (I_n) converge vers 0.

c. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n > 0$$

3. a. Démontrer que

$$I_n = P_n\left(\frac{p}{q}\right) + P_n(0) + \int_0^{\frac{p}{q}} P_n'(t) \cos(t) \mathrm{d}t$$

On admet que l'on obtient, par intégrations par parties successives :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right) + P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n \int_0^{\frac{p}{q}} P_n^{(2n+1)}(t) \cos(t) \mathrm{d}t$$

b. En déduire que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

c. Conclure.

4. Question facultative : démontrer ce qui est admis en 3.a).

Fin de l'énoncé